

Complementi sulle Rappresentazioni delle algebre di Lie

Corso di Metodi Matematici per la Fisica Teorica, Anno Accademico 2015/16

(ultimo aggiornamento: 23 dicembre 2015)

1 Operazioni elementari fra rappresentazioni

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{K} , ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Si dice \mathfrak{g} -*modulo* uno spazio vettoriale V su \mathbb{K} su cui è definita la mappa lineare $\mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$, $X \otimes v \rightarrow Xv$, $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$, con la condizione

$$[X_1, X_2]v = X_1(X_2v) - X_2(X_1v), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, v \in V. \quad (1)$$

Analogamente un omomorfismo di algebre di Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ si dice *rappresentazione di \mathfrak{g} su V* . Se V è finito dimensionale, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, e $\langle e_a \rangle_{a=1}^n$ è una base, allora ϕ associa a $X \in \mathfrak{g}$ una matrice $\phi(X) \in M_n(\mathbb{K})$ definita da $\phi(X)e_a = \sum_b \phi(X)_a^b e_b$.

I due concetti di \mathfrak{g} -modulo e di rappresentazione sono equivalenti. Infatti sia V un \mathfrak{g} -modulo, definiamo una rappresentazione $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ come $\phi(X)(v) = Xv$, $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

Sia V un \mathfrak{g} -modulo. Si dice *modulo duale* (o *rappresentazione duale* o *rappresentazione controgradiente*) la rappresentazione definita su V^* dalla formula

$$\langle X\eta, v \rangle = -\langle \eta, Xv \rangle \quad X \in \mathfrak{g}, \eta \in V^*, v \in V.$$

Se V ha un prodotto scalare con cui identifichiamo V e V^* allora la rappresentazione controgradiente è definita come $X \cdot v = -X^t v$, dove si indica con \cdot la struttura di modulo duale.

Se V_1 e V_2 sono due \mathfrak{g} -moduli, un morfismo di \mathfrak{g} -moduli è un'applicazione lineare $T : V_1 \rightarrow V_2$ tale che $T(Xv) = XT(v)$, $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Se T è invertibile allora i due \mathfrak{g} -moduli si dicono *equivalenti*.

Siano V_1 e V_2 due \mathfrak{g} -moduli. Si dice somma diretta $V_1 \oplus V_2$ il \mathfrak{g} -modulo definito sullo spazio vettoriale $V_1 \oplus V_2$ con l'azione $X(v_1 \oplus v_2) = Xv_1 \oplus Xv_2$. Se $\phi_i : \mathfrak{g} \rightarrow V_i$ sono le rappresentazioni corrispondenti, fissate le basi di V_i , la matrice che corrisponde a $X \in \mathfrak{g}$ è

$$(\phi_1 \oplus \phi_2)(X) = \begin{pmatrix} \phi_1(X) & 0 \\ 0 & \phi_2(X) \end{pmatrix} .$$

Sia V un \mathfrak{g} -modulo V ; un sottospazio vettoriale $W \subset V$ si dice invariante se $Xw \in W$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, $w \in W$. Se V contiene un sottospazio $W \subset V$ invariante proprio (cioè $W \neq 0, V$) allora si dice *riducibile*, se gli unici sottospazi invarianti sono 0 e V allora si dice *irriducibile*. Un \mathfrak{g} -modulo riducibile si dice *completamente riducibile* se per ogni $W \subset V$ invariante esiste un complementare W' invariante, tale che $V = W \oplus W'$.

Esempio 1.1. Se $\mathfrak{g} = t_n(\mathbb{K})$, l'algebra delle matrici $n \times n$ triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{K} , e $V = \mathbb{K}^n$ è il \mathfrak{g} -modulo ottenuto applicando le matrici ai vettori colonna, W generato da $w_0 = (1, 0, \dots, 0)^t$ è invariante. Si vede facilmente che qualsiasi sottospazio invariante contiene w_0 e quindi non esiste complementare invariante.

Per le algebre di Lie semplici vale il seguente risultato.

Teorema 1.2. ([5], 6.3) *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie semisemplice ogni rappresentazione finito dimensionale è completamente riducibile.*

Siano V_i , $i = 1, 2$, due \mathfrak{g} -moduli. Sul prodotto tensoriale $V_1 \otimes V_2$ definiamo la seguente struttura di \mathfrak{g} -modulo:

$$X(v_1 \otimes v_2) = Xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Xv_2, \quad X \in \mathfrak{g}, v_i \in V_i . \quad (2)$$

Mostriamo che $V_1 \otimes V_2$ è veramente un \mathfrak{g} -modulo. Infatti, se $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $v_1, v_2 \in V$ allora abbiamo che

$$X(Y(v_1 \otimes v_2)) - Y(X(v_1 \otimes v_2)) =$$

$$\begin{aligned}
&= X(Yv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Yv_2) - Y(Xv_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes Xv_2) \\
&= XYv_1 \otimes v_2 + Yv_1 \otimes Xv_2 + Xv_1 \otimes Yv_2 + v_1 \otimes XYv_2 \\
&\quad - YXv_1 \otimes v_2 - Xv_1 \otimes Yv_2 - Yv_1 \otimes Xv_2 - v_1 \otimes YXv_2 \\
&= [X, Y](v_1 \otimes v_2) .
\end{aligned}$$

Se ϕ_i sono le rappresentazioni corrispondenti, $V_1 = \langle e_a \rangle$, $V_2 = \langle e_\alpha \rangle$ una scelta di basi, allora la rappresentazione matriciale del prodotto tensoriale è data da

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(X)_{a\alpha}^{b\beta} = \phi_1(X)_a^b \delta_\alpha^\beta + \delta_a^b \phi_2(X)_\alpha^\beta .$$

2 Moduli di peso massimo

Questa sezione completa il capitolo 3 delle lezioni *Lie algebras and Root Systems* in [2]. Sia in questa sezione \mathfrak{g} semplice e complessa.

Sia \mathfrak{t} una scelta di subalgebra di Cartan e $n = \dim \mathfrak{t}$ sia il rango di \mathfrak{g} ; siano Φ le radici, $\Phi^+ = \{\beta_i\}_{i=1}^M$ una scelta di radici positive e $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ le radici semplici. Sia

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [h, X] = \alpha(h)X, \forall h \in \mathfrak{t}\}$$

l'autospazio di $\alpha \in \Phi$. Vale la decomposizione di Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \dot{+}_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha . \quad (3)$$

Grazie alla forma di Killing $(,)$ identifichiamo \mathfrak{t} con \mathfrak{t}^* ; sia $t_\alpha \in \mathfrak{t}$ l'elemento che corrisponde ad $\alpha \in \Phi$. Indichiamo con $h_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha, \alpha)$ le *coradici*. La normalizzazione di h_α è tale che

$$[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha \quad e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha . \quad (4)$$

Nel seguito di questa sezione sceglieremo poi la normalizzazione di e_α e $e_{-\alpha}$ in modo tale che

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha . \quad (5)$$

In [2] è descritta la costruzione del \mathfrak{g} -modulo irriducibile $L(\lambda)$ chiamato *modulo di Verma* per ogni $\lambda \in \mathfrak{t}^*$. Un funzionale $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ è detto *peso integrale* se $\lambda(h_{\alpha_i}) \in \mathbb{Z}$ e *dominante* se $\lambda(h_{\alpha_i}) \geq 0$ per ogni $\alpha_i \in \Pi$ (cioè $\lambda(h_{\alpha_i}) \in \mathbb{N}$). Si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.1. *i) Il modulo di Verma $L(\lambda)$ è finito dimensionale se e solo se λ è dominante e integrale;*

ii) ogni \mathfrak{g} -modulo finito dimensionale è equivalente a un modulo di Verma per qualche λ dominante integrale.

La dimostrazione di *i)* si può trovare in ([5],21.1 e 21.2), quella di *ii)* in ([5],21.2). Indichiamo con ω_i i *pesi fondamentali*, cioè tali che $\omega_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$. La matrice del cambio di base fra le radici semplici e i pesi fondamentali è la (trasposta della) *matrice di Cartan* A , cioè

$$\alpha_i = \sum_j A_{ji} \omega_j .$$

Un generico peso dominante integrale si scrive sulla base dei pesi fondamentali come $\lambda = \sum_i \lambda^i \omega_i$ con $\lambda^i \in \mathbb{N}$; indichiamo la rappresentazione corrispondente con $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$. Talvolta nella letteratura fisica le rappresentazioni sono indicate attraverso la loro dimensione; per esempio la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, che nella notazione dei coefficienti sui pesi fondamentali è $(1, 1)$, vedi Esempio 2.5, viene indicata come **8**. È chiaro che questa notazione è ambigua.

Vogliamo dare una descrizione del \mathfrak{g} -modulo $L(\lambda)$. Per $\mu \in \mathfrak{t}^*$, definiamo l'autospazio del Cartan di autovalore μ come

$$L(\lambda)_\mu = \{v \in L(\lambda) \mid hv = \mu(h)v, \forall h \in \mathfrak{t}\} .$$

Se $L(\lambda)_\mu \neq 0$, allora μ si dice un peso di $L(\lambda)$. Indichiamo con $\Phi(\lambda)$ l'insieme dei pesi di $L(\lambda)$. Collezioniamo nella seguente proposizione le proprietà di $L(\lambda)$. Ricordiamo che $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ indica l'algebra involuppo universale, definita in [2].

Proposizione 2.2. *i) Esiste $v_\lambda \in L(\lambda)_\lambda$ tale che $\mathfrak{g}_\alpha v_\lambda = 0$ per ogni $\alpha \in \Phi^+$;*

ii) $L(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_\lambda$. Inoltre, $L(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \Phi(\lambda)} V(\lambda)_\mu$ e $\dim V(\lambda)_\lambda = 1$.

iii) Se $\mu \in \Phi(\lambda)$ allora $\mu = \lambda - \sum_i \mu^i \alpha_i$, con $\mu^i \in \mathbb{N}$.

iv) Se $\mu \in \Phi(\lambda)$ e $\alpha \in \Pi$ e $r, q \in \mathbb{N}$ sono tali che $\mu + j\alpha \in \Phi(\lambda)$ for $-r \leq j \leq q$ allora

$$\mu(h_\alpha) = \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = r - q . \tag{6}$$

Il peso λ è detto il *peso massimo* di $L(\lambda)$ e il vettore v_λ si dice un *vettore di peso massimo*. Le proprietà (i, ii, iii) sono valide per ogni λ peso integrale, mentre (iv) è valida solo per λ integrale e dominante. Le prove di (i, ii, iii) sono in ([5], 20.2), quella di (iv) si trova in ([5], 21.3).

Ricordiamo da [2] che data una base $\langle T_i, i = 1, \dots, N \rangle$ di \mathfrak{g} , la base di Poincarè-Birkhoff-Wit di $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ è data dai monomi ordinati $\langle T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_N^{n_N}, n_i \geq 0 \rangle$. In particolare la decomposizione di Cartan (3) fornisce la base di \mathfrak{g}

$$\langle e_{-\beta_1}, \dots, e_{-\beta_M}, h_1, \dots, h_n, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_M}; \beta_i \in \Phi^+ \rangle,$$

dove $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$ è una base di \mathfrak{t} . La base di Poincarè-Birkhoff-Wit è dunque costituita dai monomi ordinati con gli autovettori delle radici positive a destra. In questo modo, la proprietà (ii) ci dice che i vettori di $L(\lambda)$ sono tutti ottenuti applicando gli autovettori delle radici negative al vettore di peso massimo,

$$e_{-\beta_1}^{n_1} \dots e_{-\beta_M}^{n_M} v_\lambda.$$

Esempio 2.3. Le radici sono definite come gli autovalori del Cartan nella rappresentazione aggiunta. In un'algebra semplice la rappresentazione aggiunta è irriducibile (un sottospazio invariante è un ideale di \mathfrak{g}) e quindi deve essere una rappresentazione di peso massimo: le radici sono i pesi diversi da zero della rappresentazione aggiunta. In particolare, fra le radici positive esiste una radice massima, corrispondente al peso massimo della rappresentazione aggiunta.

2.1 Ricostruzione dei pesi di una rappresentazione irriducibile dal peso massimo

Sia λ integrale e dominante e sia $L(\lambda)$ il \mathfrak{g} -modulo associato. Vogliamo mostrare come si ricostruisce l'insieme dei pesi $\Phi(\lambda)$ di $L(\lambda)$ a partire dal suo peso massimo λ . Poiché, grazie alla Proposizione 2.2 iii), $\mu \in \Phi(\lambda)$ è della forma $\mu = \lambda - \sum_i \mu^i \alpha_i$ con $\mu^i \in \mathbb{N}$, possiamo definire il livello di μ come

$$|\mu| = \sum_i \mu^i. \quad (7)$$

Il livello di μ corrisponde a quante radici semplici dobbiamo sottrarre al peso massimo per ottenere μ . Otteniamo la seguente decomposizione dell'insieme dei

pesi

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda)_0 \cup \Phi(\lambda)_1 \cup \dots \cup \Phi(\lambda)_k \cup \dots$$

Chiaramente $\Phi(\lambda)_0 = \{\lambda\}$. Supponiamo di conoscere $\Phi(\lambda)_j$ per $j < k$, vogliamo mostrare che possiamo ricostruire $\Phi(\lambda)_k$. Sia $\mu \in \Phi(\lambda)_k$, $k \neq 0$, e $v_\mu \in L(\lambda)_\mu$. Deve esistere una radice semplice $\alpha_i \in \Pi$ tale che $e_{\alpha_i} v_\mu \neq 0$, altrimenti v_μ sarebbe un vettore di peso massimo che invece è unico e ha $k = 0$. Allora, scelta questa α_i , $\mu + \alpha_i \in \Phi(\lambda)_{k-1}$ cosicché posso scrivere ogni $\mu \in \Phi(\lambda)_k$ come $\mu = \nu - \alpha_i$, dove $\nu = \mu + \alpha_i \in \Phi(\lambda)_{k-1}$. Posso dunque ricostruire $\Phi(\lambda)_k$ determinando quali coppie $\nu \in \Phi(\lambda)_{k-1}$, $\alpha_i \in \Pi$ sono tali che $\nu + \alpha_i \in \Phi(\lambda)$. Sia dunque $\nu + j\alpha_i \in \Phi(\lambda)$ con $-r \leq j \leq q$; è chiaro che $\nu + j\alpha_i \in \Phi(\lambda)_{k-1-j}$, in particolare per l'ipotesi di induzione conosco q . Utilizzando la Proposizione 2.2 (iv), posso determinare r come

$$r = q + \frac{2(\nu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}. \quad (8)$$

In particolare $\nu + \alpha_i \in \Phi(\lambda)$ se e solo se $r > 0$.

Gli autospazi corrispondenti a un peso possono avere molteplicità maggiore di 1 cosicché la ricostruzione dei pesi non permette da sola di ricostruire la rappresentazione. Si veda l'esempio 2.5.

Esempio 2.4. Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. L'unico peso fondamentale è $\omega = \alpha/2$, dove α è l'unica radice semplice, cosicché le rappresentazioni finite dimensionali irriducibili hanno peso massimo $s\omega = s\alpha/2$ per ogni $s \in \mathbb{N}$. Determiniamo i pesi della rappresentazione (s) di peso massimo $s\omega$. Dobbiamo determinare l'estensione della stringa di pesi $s\omega + j\alpha = (j + s/2)\alpha$. Chiaramente $-r \leq j \leq 0$, e otteniamo r dalla (8)

$$r = \frac{2(s\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = s.$$

I pesi della rappresentazione (s) sono dunque $\Phi(s) = \{(j + s/2)\alpha, -s \leq j \leq 0\}$ e lo spettro di h_α è $\{-s \leq s + 2j \leq s, j = -s \dots, 0\}$. La rappresentazione (s) corrisponde alla rappresentazione di spin $s/2$; possiamo così concludere che la molteplicità di ogni autospazio $L(s)_{(j+s/2)\alpha}$ è 1.

Esempio 2.5. Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = A_2$ e sia $\lambda = (1, 1)$ il peso massimo che definisce $L(1, 1)$. I pesi fondamentali di A_2 sono

$$\omega_1 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{3}, \quad \omega_2 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3}, \quad (9)$$

cosicché il peso massimo in funzione delle radici semplici è $\lambda = \omega_1 + \omega_2 = \alpha_1 + \alpha_2$. Conoscendo $\Phi(\lambda)_0 = \{\alpha_1 + \alpha_2\}$ calcoliamo $\Phi(\lambda)_1$ determinando se $\lambda - \alpha_1 = \alpha_2$ e $\lambda - \alpha_2 = \alpha_1$ sono dei pesi. Consideriamo $\lambda - \alpha_1 = \alpha_2$. Poiché $\lambda + j\alpha_1$ non è un peso per $j > 0$ otteniamo $q = 0$ nella formula (8). Infine, calcoliamo

$$r = \frac{2(\lambda, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = (\omega_1 + \omega_2)(h_{\alpha_1}) = 1$$

cosicché $\lambda - \alpha_1 = \alpha_2 \in \Phi(\lambda)$. Ripetendo lo stesso calcolo per α_2 determiniamo $\Phi(\lambda)_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Calcoliamo ora $\Phi(\lambda)_2$. Nella stringa $\alpha_1 + j\alpha_1$ non compare nessun peso per $j > 0$ cosicché $q = 0$ in (8) e otteniamo

$$r = \frac{2(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 2$$

cosicché $\alpha_1 - \alpha_1 = 0 \in \Phi(\lambda)_2$ e $\alpha_1 - 2\alpha_1 = -\alpha_1 \in \Phi(\lambda)_3$. Analogamente studiamo la stringa $\alpha_1 + j\alpha_2$ vediamo che $q = 1$ cosicché

$$r = 1 + \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = 1 - 1 = 0,$$

cosicché $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \Phi(\lambda)$. Continuando così, calcoliamo $\Phi(\lambda)_2 = \{0\}$, $\Phi(\lambda)_3 = \{-\alpha_1, -\alpha_2\}$, $\Phi(\lambda)_4 = \{-\alpha_1 - \alpha_2\}$. I pesi diversi da 0 della rappresentazione $(1, 1)$ coincidono con le radici, riconosciamo così la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. In particolare la molteplicità delle radici è 1 e del peso nullo è 2 (in tal caso infatti l'autospazio è la subalgebra di Cartan); un vettore di peso 0 può essere ottenuto dal vettore di peso massimo in due modi diversi, $e_{-\alpha_1}(e_{-\alpha_2}v_\lambda)$ e $e_{-\alpha_2}(e_{-\alpha_1}v_\lambda)$ che corrispondono a

$$[e_{-\alpha_1}, [e_{-\alpha_2}, e_{\alpha_1 + \alpha_2}]] = N_{-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2} [e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_1}] = 2N_{-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2} h_{\alpha_1},$$

$$[e_{-\alpha_2}, [e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_1 + \alpha_2}]] = N_{-\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2} [e_{-\alpha_2}, e_{\alpha_2}] = 2N_{-\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2} h_{\alpha_2}.$$

La rappresentazione $(1, 1)$ viene indicata con 8 nella notazione fisica, dalla sua dimensione.

Esempio 2.6. Si consideri ora $\lambda = (1, 0)$ ossia il peso massimo è $\lambda = \omega_1$. Calcoliamo $\Phi(1, 0)_1$. Dobbiamo studiare la stringa $\omega_1 + j\alpha_1$, con $q = 0$. Quindi $r = \omega_1(h_{\alpha_j}) = \delta_{1j}$, cosicché $\Phi(1, 0)_1 = \{\omega_1 - \alpha_1\}$.

Studiamo ora la stringa $\omega_1 - \alpha_1 + j\alpha_2$, visto che il peso $\omega_1 - 2\alpha_1$ è già escluso. Chiaramente $q = 0$ cosicché $r = (\omega_1 - \alpha_1, h_{\alpha_2}) = -(\alpha_1, h_{\alpha_2}) = -A_{21} = 1$, cosicché $\Phi(1, 0)_2 = \{\omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2\}$.

Consideriamo ora $\Phi(1, 0)_3$. Poiché $\omega_1 - \alpha_1 - 2\alpha_2$ è già escluso dalle considerazioni precedenti, dobbiamo valutare solamente la stringa $\omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2 + j\alpha_1$ con $q = 0$. Calcoliamo $r = (\omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2, h_{\alpha_1}) = 1 - 2 + 1 = 0$. Cosicché $\Phi(1, 0) = \emptyset$.

Si consideri ora un generico elemento del Cartan $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_3)$, con $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. È chiaro che nella base delle coradici

$$t = t_1 h_{\alpha_1} + (t_1 + t_2) h_{\alpha_2} . \quad (10)$$

Possiamo quindi valutare i pesi di $(1, 0)$ su t come

$$\omega_1(t) = t_1, \quad (\omega_1 - \alpha_1)(t) = t_1 - t_1 + t_2 = t_2, \quad (\omega_1 - \alpha_1 - \alpha_2)(t) = t_3.$$

Riconosciamo quindi i pesi $\Lambda_i(t) = t_i$ della rappresentazione definitoria in cui $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, definito come l'algebra delle matrici 3×3 antihermitiane agisce su \mathbb{C}^3 . Ne concludiamo che gli autospazi sono tutti di dimensione 1. Si noti che non abbiamo utilizzato l'espressione dei pesi sulla base delle radici semplici data nella formula (9). Nella notazione fisica $(1, 0)$ è indicata come 3.

Esempio 2.7. Si consideri ora $(0, 1)$, cioè $\lambda = \omega_2$. Calcoliamo $\Phi(0, 1)_1$. Chiamamente $\omega_2(h_{\alpha_i}) = \delta_{i2}$ cosicché $\Phi(0, 1)_1 = \{\omega_2 - \alpha_2\}$. Studiamo ora la stringa $\omega_2 - \alpha_2 + j\alpha_1$. Poiché $q = 0$, $r = (\omega_2 - \alpha_2, h_{\alpha_1}) = 1$ cosicché $\Phi(0, 1)_2 = \{\omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2\}$. Infine ci resta solo da considerare $\omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + j\alpha_2$. Poiché $q = 0$, $(\omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2, h_{\alpha_2}) = 1 + 1 - 2 = 0$, cosicché $\Phi(0, 1)_3 = \emptyset$.

Utilizzando la base (10), possiamo calcolare i pesi come

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= t_1 + t_2 = -t_3, & (\omega_2 - \alpha_2)(t) &= -t_3 - t_2 + t_3 = -t_2, \\ (\omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2)(t) &= -t_2 - t_1 + t_2 = -t_1, \end{aligned}$$

riconoscendo così i pesi della rappresentazione duale della rappresentazione definitoria. In particolare sappiamo che la molteplicità di ogni peso è 1. Nella notazione fisica è indicata con $\bar{3}$.

2.2 Riduzione del prodotto tensoriale di due rappresentazioni

Siano $L(\lambda_1)$ e $L(\lambda_2)$ due rappresentazioni finito dimensionali irriducibili di \mathfrak{g} . Possiamo considerare il prodotto tensoriale delle rappresentazioni $L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2)$

che, in generale, è riducibile e quindi completamente riducibile. Dobbiamo determinare la sua decomposizione in rappresentazioni irriducibili

$$L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2) = \bigoplus_{\lambda} L(\lambda) \quad . \quad (11)$$

Possiamo determinare agevolmente i pesi $\Phi(\lambda_1 \otimes \lambda_2)$ di $L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2)$ a partire dai pesi delle due rappresentazioni. Infatti se $\mu \in \Phi(\lambda_1)_\mu$ e $\nu \in \Phi(\lambda_2)_\nu$, $v_\mu \in L(\lambda)_\mu$ e $w_\nu \in L(\lambda)_\nu$ allora, per ogni $h \in \mathfrak{t}$,

$$h(v_\mu \otimes w_\nu) = hv_\mu \otimes w_\nu + v_\mu \otimes hw_\nu = (\mu + \nu)(h)v_\mu \otimes w_\nu ,$$

cioè $\mu + \nu \in \Phi(\lambda_1 \otimes \lambda_2)$. Quindi possiamo concludere che

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1 \otimes \lambda_2) &= \Phi(\lambda_1) + \Phi(\lambda_2) , \\ L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2) &= \bigoplus_{\mu \in \Phi(\lambda_1 \otimes \lambda_2)} (L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2))_\mu , \\ (L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2))_\mu &= \bigoplus_{\nu_1 + \nu_2 = \mu} L(\lambda_1)_{\nu_1} \otimes L(\lambda_2)_{\nu_2} . \end{aligned}$$

È chiaro anche che v_{λ_1} e w_{λ_2} sono i vettori di peso massimo, $e_\alpha(v_{\lambda_1} \otimes w_{\lambda_2}) = 0$, per ogni $\alpha \in \Phi^+$, cioè $v_{\lambda_1} \otimes w_{\lambda_2}$ è un vettore di peso massimo $\lambda_1 + \lambda_2$ che definisce la rappresentazione $L(\lambda_1 + \lambda_2)$ nella decomposizione del prodotto tensoriale.

Si può ricostruire la decomposizione (11), sottraendo prima all'insieme dei pesi $\Phi(\lambda_1 \otimes \lambda_2)$, contati con la loro molteplicità, i pesi di $L(\lambda_1 + \lambda_2)$ e poi iterando la procedura, riconoscendo fra i pesi residui il peso massimo e sottraendo i pesi della sua rappresentazione. È bene sottolineare che per effettuare questa procedura è necessario tener conto delle molteplicità dei pesi di tutte le rappresentazioni coinvolte.

Esempio 2.8. Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Determiniamo la decomposizione di $L(s) \otimes L(s')$. Senza perdita di generalità, assumiamo che $s' \leq s$. Sappiamo dalla discussione in 2.4 che i pesi di (s) sono $\Phi(s) = \{s\omega - j\alpha, j = 0, \dots, s\}$ e analogamente per $\Phi(s')$. I pesi di $L(s) \otimes L(s')$ sono quindi $\Phi(s \otimes s') = \{(s + s')\omega - k\alpha, k = 0, \dots, s + s'\}$. Conoscendo che $\dim L(s)_{(s/2-j)\alpha} = 1$ possiamo ricostruire la molteplicità $n_k = \dim(L(s) \otimes L(s'))_{((s+s')\omega - k\alpha)}$ come

$$n_k = \#\{j, 0 \leq j \leq s, 0 \leq k - j \leq s'\} = \begin{cases} k + 1 & k \leq s' \\ s' + 1 & s' \leq k \leq s \\ s + s' + 1 - k & s \leq k \leq s + s' \end{cases} .$$

Al variare di k , il massimo di n_k è raggiunto per $s' \leq k \leq s$ quando $n_{max} = s' + 1$. La rappresentazione $L(s + s')$ compare nella decomposizione; sottraiamo i suoi pesi $\Phi(s + s') = \Phi(s \otimes s')$ da $\Phi(s \otimes s')$ ma tenendo conto delle molteplicità; otteniamo cioè l'insieme di pesi $\{(s + s')\omega - k\alpha, k = 1, \dots, s + s' - 1\}$, ciascun peso con molteplicità $n_k - 1$. Questa procedura può essere iterata, sottraendo i pesi delle rappresentazioni $L(s + s' - 2k)$ fino ad esaurimento dei pesi. Questo avverrà quando avremo sottratto $n_{max} - 1 = s'$ rappresentazioni. Quindi otteniamo la decomposizione

$$L(s) \otimes L(s') = \bigoplus_{0 \leq k \leq s'} L(s + s' - 2k) .$$

Esempio 2.9. Si consideri la riduzione di $(1, 0) \otimes (0, 1)$. Conosciamo i pesi e le degenerazioni di $(1, 0)$ e $(0, 1)$ dalla discussione negli Esempi 2.6 e 2.7. I pesi del prodotto tensoriale sono la somma dei pesi delle due rappresentazioni, contati con la loro degenerazione:

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\omega_1 + \omega_2} & \\ \underline{\omega_1 + \omega_2 - \alpha_2} & & \underline{\omega_1 + \omega_2 - \alpha_1} \\ \underline{\omega_1 + \omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2} & \underline{\omega_1 + \omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2} & \omega_1 + \omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ \underline{\omega_1 + \omega_2 - 2\alpha_1 - \alpha_2} & & \underline{\omega_1 + \omega_2 - \alpha_1 - 2\alpha_2} \\ & \underline{\omega_1 + \omega_2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2} & . \end{array}$$

Ricordandosi che $\alpha_1 + \alpha_2 = \omega_1 + \omega_2$, riconosciamo i pesi sottolineati come i pesi della rappresentazione aggiunta $(1, 1)$ visti nell'esempio 2.5 con la loro molteplicità, che è 1 per i pesi diversi da 0 e 2 per il peso $\omega_1 + \omega_2 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Una volta sottratti i pesi della $(1, 1)$ rimane solo un peso 0 con molteplicità 1. Concludiamo che

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0)$$

o, nella notazione fisica, $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$.

2.3 Casimir quadratico

Uno strumento utile per decomporre una rappresentazione riducibile è il Lemma di Schur, che è valido per ogni algebra di Lie \mathfrak{g} .

Lemma 2.10. *Se $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ è una rappresentazione irriducibile e $c \in \mathfrak{gl}(V)$ commuta con $\phi(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ allora $c = c_\phi 1_V$, per $c_\phi \in \mathbb{K}$.*

Sia ora \mathfrak{g} semisemplice; la forma di Cartan è non degenere e quindi la matrice (g_{ij}) che la rappresenta nella base $\langle T_i \rangle$ è invertibile; sia (g^{ij}) l'inversa. Definiamo allora il Casimir quadratico

$$c_2 = g^{ij} T_i T_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) . \quad (12)$$

È chiaro che c_2 non dipende dalla scelta della base.

Lemma 2.11. *c_2 commuta con ogni elemento $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, in particolare $c_2 X - X c_2 = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$.*

Dim. Calcoliamo

$$[T_k, c_2] = g^{ij} [T_k, T_i] T_j + g^{ij} T_i [T_k, T_j] = (g^{ij} f_{ki}^r + g^{ri} f_{ki}^j) T_r T_j = 0 ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'invarianza della forma di Killing. ■

Se consideriamo il \mathfrak{g} -modulo irriducibile finito dimensionale $L(\lambda)$, applicando il Lemma di Schur, sappiamo che $c_2 = c_2(\lambda) 1_{L(\lambda)}$. I valori di $c_2(\lambda)$ sono tabulati, si veda l'esempio seguente per il caso di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Infine, data una qualsiasi rappresentazioni di \mathfrak{g} , una condizione necessaria perché sia irriducibile è che c_2 agisca come multiplo dell'identità.

Esempio 2.12. Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Consideriamo la base $\{h_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha}\}$ definita in (4), (5). Ricordando che per $sl(n, \mathbb{C})$ la forma di Killing vale $(X, Y) = 2n \text{Tr}(XY)$, ricostruiamo la matrice della forma di Killing come

$$g = 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

Alla fine scriviamo

$$4c_2 = h_\alpha^2/2 + e_{-\alpha} e_\alpha + e_\alpha e_{-\alpha} = h_\alpha(1 + h_\alpha/2) + 2e_{-\alpha} e_\alpha .$$

Se applichiamo c_2 sul vettore di peso massimo del modulo $L(s)$ otteniamo $4c_2(s) = s(1 + s/2)$, $s = 0, 1, \dots$. Se invece consideriamo la forma reale compatta $\mathfrak{su}(2)$, c_2 è scritto sulla base dei generatori antihermitiani J_i

$$e_\alpha = J_1 - iJ_2, \quad e_{-\alpha} = -J_1 - iJ_2, \quad h_\alpha = -2iJ_3$$

come

$$2c_2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2 \ .$$

3 Rappresentazioni unitarie

La classificazione delle rappresentazioni irriducibili finito dimensionali che abbiamo visto nella Sezione precedente vale per algebre di Lie semplici complesse. Ci possiamo domandare se da questa classificazione possiamo ottenere la classificazione delle rappresentazioni delle algebre di Lie semplici reali.

Le rappresentazioni naturali di un'algebra di Lie reale sono su spazi vettoriali reali. Si possono considerare anche rappresentazioni su spazi vettoriali complessi, ma, se non si richiede nessuna proprietà aggiuntiva, queste rappresentazioni dipendono solo dall'algebra di Lie complessificata e non distinguono la particolare forma reale: infatti ogni rappresentazione di un'algebra complessa è una rappresentazione di ogni sua forma reale. Per tener conto della particolare forma reale, si impone la condizione di unitarietà.

Sia \mathfrak{k} un'algebra di Lie reale; sia V uno spazio vettoriale complesso con un prodotto scalare (cioè una forma hermitiana definita positiva). Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(V)$ possiamo definire l'aggiunto $A^\dagger \in \mathfrak{gl}(V)$. Una rappresentazione $\phi : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ si dice *unitaria* se $\phi(X)^\dagger = -\phi(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{k}$.

Sia \mathfrak{g} un'algebra semplice complessa e sia \mathfrak{k} una sua forma reale (cioè $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$). Sia $L(\lambda)$ una rappresentazione finito dimensionale complessa di \mathfrak{g} . Ci possiamo quindi chiedere se esiste un prodotto scalare su $L(\lambda)$ che rende la rappresentazione di \mathfrak{k} unitaria.

Enunciamo il seguente risultato, senza dimostrazione.

Teorema 3.1. *i) Se \mathfrak{k} è un'algebra di Lie semplice non compatta ogni sua rappresentazione unitaria differente dalla rappresentazione banale è infinito dimensionale.*

ii) Se \mathfrak{k} è un'algebra di Lie semplice e compatta, ogni rappresentazione finito dimensionale di $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ è unitarizzabile.

Questi due risultati sono facilmente dimostrabili nella versione di teoria dei gruppi, da cui il Teorema 3.1 segue. Per esempio, la dimostrazione della versione grupale di *i*) si può trovare in ([1], Chp.8,1,B). Per mostrare il caso *ii*), partendo da una rappresentazione finito dimensionale di $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, questa è una rappresentazione di \mathfrak{k} e del suo gruppo di Lie K . Prendendo un qualsiasi prodotto scalare (anche non invariante), si costruisce un prodotto scalare mediando sull'azione di K . Il nuovo prodotto scalare è invariante e la rappresentazione è unitaria. In questo caso, l'ipotesi di compattezza garantisce che la media su K sia definita.

Infine, ricordiamo che, data \mathfrak{g} semplice e complesso, la forma reale compatta \mathfrak{k} è definita restringendo la parentesi di Lie allo spazio vettoriale reale con base $\langle U_{\alpha}, V_{\alpha}, H_{\alpha}; \alpha \in \Phi^+ \rangle$

$$U_{\alpha} = i(e_{\alpha} + e_{-\alpha}), \quad V_{\alpha} = e_{\alpha} - e_{-\alpha} \quad H_{\alpha} = it_{\alpha}.$$

Sia $L(\lambda)$ una rappresentazione finito dimensionale di \mathfrak{g} . Si verifica facilmente che un prodotto scalare che rende la rappresentazione unitaria per \mathfrak{k} , è tale che $e_{\alpha}^{\dagger} = e_{-\alpha}$ e $L(\lambda)_{\mu}$ è ortogonale a $L(\lambda)_{\nu}$ se $\mu \neq \nu$.

4 Le rappresentazioni di $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$

Il teorema di classificazione non fornisce un metodo per costruire esplicitamente le rappresentazioni; sappiamo come ricostruire i pesi di una rappresentazione a partire dal suo peso massimo ma non conosciamo per esempio la degenerazione di ogni autospazio e neanche la dimensione della rappresentazione. È quindi utile trovare un modo esplicito per costruire queste rappresentazioni. Vediamo prima qualche esempio notevole. In questa sezione $V = \mathbb{C}^{n+1}$ e e_i denota il vettore i -esimo della base canonica; poichè $\mathfrak{su}(n+1)$ è identificato con l'algebra delle matrici antihermitiane $n \times n$, c'è una rappresentazione naturale di $\mathfrak{su}(n+1)$ su V , che chiamiamo rappresentazione definitoria.

Esempio 4.1. Consideriamo innanzitutto la rappresentazione definitoria ottenuta dall'identificazione di $\mathfrak{su}(n+1)$ come algebra delle matrici antihermitiane, che agiscono quindi naturalmente su $V = \mathbb{C}^{n+1}$. È chiaro che e_1 soddisfa $e_{ij}(e_1) = 0$ se $i < j$ e $h_{\alpha_i}(e_1) = \delta_{i1}e_1$ cosicché e_1 è il vettore di peso massimo e il peso

massimo è $(1, 0, \dots, 0)$. Questo fatto l'avevamo verificato nell'esempio 2.6 per $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Esempio 4.2. Consideriamo ora la rappresentazione controgradiente della fondamentale. Sia cioè $V = \mathbb{C}^{n+1}$ identificato con il suo duale tramite il prodotto scalare $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. L'azione controgradiente è quindi definita come $X \cdot v = -X^t v = \bar{X}v$, per $X \in \mathfrak{su}(n+1)$. Poiché $e_{ij}^t = e_{ji}$, è chiaro che $e_{ij} \cdot e_{n+1} = -e_{ji}e_{n+1} = 0$ se $i < j \leq n+1$ e $h_{\alpha_i} \cdot e_{n+1} = -h_{\alpha_i}e_{n+1} = \delta_{in}e_{n+1}$, cosicché e_{n+1} è il vettore di peso massimo $(0, \dots, 1)$.

Possiamo considerare il prodotto tensoriale della rappresentazione fondamentale $V^{\otimes N}$. Su questo spazio agisce il gruppo simmetrico Σ_N . Il gruppo simmetrico Σ_N è il gruppo delle permutazioni di N oggetti, cioè $\sigma \in \Sigma_N$ se $\sigma(1, \dots, N) = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ è una permutazione di $(1, \dots, N)$. È un gruppo finito di $N!$ elementi. Agisce su $V^{\otimes N}$ con l'azione

$$\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_N) = v_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes v_{\sigma_N} .$$

È chiaro che data la formula (2) del prodotto tensoriale di rappresentazioni, l'azione di $\mathfrak{su}(n+1)$ su $V^{\otimes N}$ commuta con l'azione del gruppo simmetrico. Mostriamo come tutte le rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{su}(n+1)$ si ottengono dalla decomposizione della rappresentazione su $V^{\otimes N}$ per un N opportuno.

Esempio 4.3. Sia $N \leq n+1$. Si consideri ad esempio $\Lambda^N V = \text{Im} A_N$, dove

$$A_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-)^{\sigma} \sigma : V^{\otimes N} \rightarrow V^{\otimes N}$$

è l'antisimmetrizzatore di N oggetti. Poiché $e_{ij}(e_k) = \delta_{jk}e_i$ e $h_{\alpha_i}(e_k) = (\delta_{ik} - \delta_{i+1,k})e_k$ si vede che se $i < j$ allora

$$\begin{aligned} e_{ij}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N) &= \sum_{k=1}^N \delta_{jk} e_1 \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_N = 0, \\ h_{\alpha_i}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N) &= \delta_{iN} (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N), \end{aligned}$$

cioè $e_1 \wedge \dots \wedge e_N$ è il vettore di peso massimo $\omega_N = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ se $N \leq n$. Se $N = n+1$ allora $\Lambda^{n+1} V = \mathbb{C}$ e la rappresentazione è quella banale in cui rappresento tutta l'algebra con 0. In particolare, la rappresentazione $(0, \dots, 1)$ è

realizzata sia su $\Lambda^n V$ che su V , come mostrato nell'Esempio 4.2. La relazione è data da questo isomorfismo $\epsilon : \mathbb{C}^{n+1*} \rightarrow \Lambda^n \mathbb{C}^{n+1}$ definito da

$$\epsilon(\eta) \wedge w = \langle \eta, w \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1} \in \Lambda^{n+1} \mathbb{C}^{n+1} .$$

Dopo aver identificato \mathbb{C}^{n+1} con il suo duale, in coordinate $\epsilon(v)^{i_1 \dots i_n} = \epsilon^{j i_1 \dots i_n} v_j$ dove $\epsilon^{i_1 \dots i_{n+1}}$ è il tensore completamente antisimmetrico in $n + 1$ indici.

Esempio 4.4. Consideriamo ora prodotto tensoriale simmetrico $S^N V = \text{Im} S_N$, dove $S_N = (1/N!) \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \sigma$ è il simmetrizzatore. Sia ora $e_1^N = S_N(e_1)$. È chiaro che $e_{ij}(e_1^N) = 0$ se $1 \leq i < j$ e $h_{\alpha_i}(e_1^N) = N \delta_{i1} e_1^N$ cosicchè e_1^N è il vettore di peso massimo $(N, 0, \dots, 0)$.

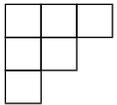
Per ottenere il caso generale possiamo combinare questi esempi. Infatti, la rappresentazione di peso massimo $\lambda = (k_1, \dots, k_n)$ comparirà nella riduzione del prodotto tensoriale $(k_1, 0, \dots, 0) \otimes (0, k_2, \dots, 0) \otimes \dots \otimes (0, \dots, k_n)$

$$S^{k_1} V \otimes (\Lambda^2 V)^{\otimes k_2} \otimes \dots \otimes (\Lambda^n V)^{\otimes k_n} \subset V^{\otimes N}$$

per $N = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + nk_n$. Per individuare quale sottospazio invariante di $V^{\otimes N}$ definisce esattamente questa rappresentazione possiamo determinare il sottogruppo del gruppo simmetrico che lascia invariato il vettore di peso massimo

$$v_\lambda = \underbrace{e_1 \otimes \dots \otimes e_1}_{k_1} \otimes \underbrace{e_{12} \otimes \dots \otimes e_{12}}_{k_2} \dots \otimes \underbrace{e_{1\dots n} \otimes \dots \otimes e_{1\dots n}}_{k_n}, \quad (13)$$

dove abbiamo notato $e_{1\dots r} = e_1 \wedge \dots \wedge e_r$. Per comprendere quale è questo sottogruppo è utile introdurre la seguente notazione. Per ogni $(a_1, \dots, a_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ con $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_\ell$, si dice *tableau di Young* $Y(a_1, \dots, a_\ell)$ il diagramma costituito da $N = \sum_j a_j$ box, disposti su ℓ righe in modo che il numero di box sulla riga r sia a_r . Per esempio il diagramma $Y(3, 2, 1)$ è raffigurato come



Per ogni peso massimo (k_1, \dots, k_n) , consideriamo ora il tableau $Y(a_1, \dots, a_N)$ avente $a_j = k_j + k_{j+1} + \dots + k_n$ box sulla riga j con $N = \sum_{j=1}^n jk_j$. Supponiamo di riempire con 1 i box della prima riga, con 2 i box della seconda riga e così via. Facciamo corrispondere questo tableau numerato al vettore

$$v_Y = \underbrace{e_1 \otimes \dots \otimes e_1}_{k_1 + \dots + k_n} \otimes \underbrace{e_2 \otimes \dots \otimes e_2}_{k_2 + \dots + k_n} \otimes \dots \otimes \underbrace{e_n \otimes \dots \otimes e_n}_{k_n} .$$

È chiaro che il vettore di peso massimo $v_\lambda = P_Y(v_Y)$ dove P_Y è il proiettore ottenuto simmetrizzando riga per riga e antisimmetrizzando colonna per colonna. Per visualizzare meglio le operazioni di antisimmetrizzazione lungo le colonne, conviene però ordinare i fattori del prodotto tensoriale per colonne. Il primo fattore corrisponde al box più a destra della prima riga, il secondo al box più in basso fino a esaurimento della colonna, per poi passare alla colonna più a sinistra, e così via.

1	1	1
2	2	
3		

Nell'esempio del tableau $Y(3, 2, 1)$ la configurazione corrisponde al vettore $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$ e la sua antisimmetrizzazione lungo le colonne produce $e_1 \otimes e_{12} \otimes e_{123}$, cioè il vettore di peso massimo $(1, 1, 1)$ di $\mathfrak{su}(4)$.

Ad ogni tableau Y possiamo associare un proiettore che consiste nella composizione della simmetrizzazione lungo le righe con l'antisimmetrizzazione lungo le colonne (si veda [3] per maggiori dettagli). Poichè l'azione del gruppo simmetrico commuta con l'azione di $su(n+1)$, l'immagine di questo proiettore è un sottospazio invariante che contiene il vettore di peso massimo v_λ definito in (13). Si dimostra che questa rappresentazione è irriducibile e che quindi coincide con la rappresentazione di peso massimo (k_1, \dots, k_n) .

Questa identificazione delle rappresentazioni di $su(n+1)$ con i tableaux di Young ci permette di ottenere diverse informazioni. Citiamo una formula per la dimensione della rappresentazione e un metodo per calcolare la riduzione del prodotto tensoriale.

4.1 Una formula per la dimensione di (k_1, \dots, k_n)

Sia (k_1, \dots, k_n) una rappresentazione irriducibile di $su(n+1)$ e sia Y il suo tableau di Young. Sia $F(Y)$ il numero ottenuto moltiplicando tutti i numeri

disposti nei box con questo criterio: si inserisca $n + 1$ nel box in alto a sinistra e poi si aumenti di 1 quando ci si sposta nel box a destra e si diminuisca di 1 quando ci si sposta nel box in basso. Si chiama uncino (*hook*) un cammino che parte verticale dal fondo di una colonna e a un qualsiasi box gira a destra e esce dal fondo di una riga. Sia h il numero di box attraversati da questo uncino e sia $H(Y)$ il prodotto di h al variare di tutti gli uncini possibili. Si dimostra che

$$\dim(k_1, \dots, k_n) = F(Y)/H(Y) .$$

Esempio 4.5. Consideriamo la rappresentazione aggiunta $(1, 1)$ di $\mathfrak{su}(3)$ che corrisponde al tableau di Young $Y(2, 1)$. Allora consideriamo $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ cosicché $F(Y) = 24$. Ci sono tre uncini possibili con numero di box attraversati 1, 3, 1, rispettivamente, cosicché $H(Y) = 3$ e la dimensione della rappresentazione aggiunta è 8.

Nel caso di $\mathfrak{su}(3)$ la dimensione della rappresentazione (m, n) può essere calcolata facilmente

$$\dim(m, n) = \frac{(m + n + 2)(n + 1)(m + 1)}{2} .$$

4.2 Riduzione del prodotto tensoriale

La descrizione delle rappresentazioni irriducibili tramite i diagrammi di Young è particolarmente utile per risolvere il problema della riduzione del prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili. Infatti consideriamo il seguente algoritmo.

Si considerino due rappresentazioni R_1 e R_2 con tableaux di Young Y_1 e Y_2 . Riempiamo i box della prima riga di Y_1 con a , quelli della seconda riga con b e così via. Si prendano i boxes della prima riga di Y_2 e si giustappongano con Y_1 in modo da formare altri tableaux di Young in cui non ci sono due \boxed{a} nella stessa colonna. Poi si prosegue con la seconda riga in modo però che il numero di \boxed{a} contato riga per riga, da destra verso sinistra e dall'alto verso il basso, non sia mai minore del numero di \boxed{b} . Si prosegue fino ad esaurire le righe.

I tableaux ottenuti corrisponderanno alle rappresentazioni che appaiono nella decomposizione del prodotto tensoriale $R_1 \otimes R_2$.

Consideriamo alcuni esempi di riduzione del prodotto tensoriale di due rappresentazioni di $A_2 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Esempio 4.6. Consideriamo $(1, 0) \otimes (1, 0)$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{a} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \mathbf{a} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \end{array}$$

cosicchè $(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1)$. Nella notazione fisica, $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$.

Esempio 4.7. Consideriamo $(0, 1) \otimes (1, 0)$.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{a} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \mathbf{a} \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \end{array}$$

cosicchè $(0, 1) \otimes (1, 0) = (1, 1) \oplus (0, 0)$, perché la colonna di tre boxes corrisponde alla rappresentazione banale. Nella notazione fisica $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$.

Esempio 4.8. Consideriamo $(0, 1) \otimes (0, 1)$.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{b} \\ \hline \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \mathbf{a} \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{b} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \mathbf{a} \\ \hline \square & \mathbf{b} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \mathbf{a} \\ \hline \square & \\ \hline \mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

dato che il secondo diagramma fra parentesi non dà alcun contributo (si ricordi che la colonna di quattro boxes non è possibile). Ne concludiamo che $(0, 1) \otimes (0, 1) = (0, 2) \oplus (1, 0)$. Nella notazione fisica, $\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3$. Questo stesso risultato lo si sarebbe potuto ottenere dal risultato precedente osservando che $(0, 1)$ è la rappresentazione duale di $(1, 0)$.

Esempio 4.9. Consideriamo $(1, 0) \otimes (2, 0)$.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{a} & \\ \hline \end{array} .$$

Vediamo quindi che $(1, 0) \otimes (2, 0) = (3, 0) \oplus (1, 1)$ o, nella notazione fisica, $3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$. È chiaro che sarebbe stato conveniente calcolare la riduzione nell'ordine opposto $(2, 0) \otimes (1, 0)$, ma in questo modo abbiamo potuto verificare che non si devono includere i tableaux in cui ci sono due o più \mathbf{a} nella stessa colonna..

