Metodi Matematici per la Fisica Teorica

Sessione Invernale, Martedì 15 Gennaio 2019

Compito scritto

1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{a\ln(1+bx)}{x^\delta}\mathrm{d}x,$$

con $a, b > 0$, $1 < \delta < 2$. Trovato il risultato, si valutino i primi due termini della sua espansione in $\epsilon := 2-\delta$, per $\epsilon \to 0^+$.

2) Si determini il termine dominante nell'espansione asintotica di

$$F(x) := \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x[\sin\theta - \theta\cos\beta]}\mathrm{d}\theta, \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

per $x \to +\infty$.

3) Si determini il vettore di peso massimo della rappresentazione $(1,0)$ di $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ che compare nella decomposizione in rappresentazioni irriducibili del prodotto tensoriale $(2,0)\otimes(0,1)$. [*suggerimento*: si ricordi che la $(2,0)$ può essere realizzata su $S^2\mathbb{C}^3$, il prodotto tensoriale simmetrico di $\mathbb{C}^3$].

4) Sia

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice simplettica e $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}), A^TJ+JA=0\}$ l'algebra di Lie simplettica. Sia inoltre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ la subalgebra compatta massimale definita come $\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R}),\ A^\dagger = -A\}$. Si dimostri che $\mathfrak{h}$ è isomorfa a $\mathfrak{u}(n)$.