

Metodi Matematici per la Fisica Teorica

Sessione Estiva, Lunedì 10 Luglio 2017

Compito scritto

- 1) Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sia $V(z)$ analitica in un aperto $D \subset \mathbb{C}$, tale che $[a, b] \subset D$. Sia data la funzione

$$R(z) := \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{4\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z-u} \frac{V(u)}{\sqrt{(u-a)(u-b)}} du, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, b],$$

con Γ contorno semplice in \mathbb{C} , orientato in senso antiorario, che racchiude l'intervallo $[a, b]$, ma nessun'altra singolarità dell'integrando. Dimostrare che $R(z)$ è soluzione dell'equazione

$$R(x+i0) + R(x-i0) = V(x), \quad x \in [a, b].$$

Calcolare la funzione $R(z)$ nel caso $V(x) = x$. Determinare poi i valori di a, b affinché

$$R(z) \sim \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

- 2) Si determini il termine dominante nell'espansione asintotica di

$$I(x) := \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} e^{-2xt^2-4x/t} dt$$

per $x \rightarrow \infty$.

- 3) Determinare la segnatura della forma di Killing di $\mathfrak{su}(3, 3)$.
- 4) Determinare il vettore di peso massimo della rappresentazione banale che compare nella riduzione in rappresentazioni irriducibili del prodotto tensoriale $(n) \otimes (n)$ di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ per $n \in \mathbb{N}$.