

Complementi di Metodi Matematici per la Fisica

Docenti: Filippo Colomo e Giuliano Panico

Sessione Estiva, Martedì 13 Settembre 2022

Compito scritto¹

- 1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \ln(1+x+x^2)x^{\mu}dx,$$

con $-2 < \mu < -1$.

- 2) Si determini il termine dominante nell'espansione asintotica di

$$F(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix[\sin\theta - \theta \cos\alpha]} d\theta, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

per $x \rightarrow +\infty$.

- 3) Si risolva il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \frac{1}{4}u(x) = \frac{x}{4} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

utilizzando il metodo della funzione di Green. [Suggerimento: si noti che l'operatore differenziale non è nella forma di Sturm-Liouville.]

- 4) Si consideri l'equazione differenziale

$$3z(z^2 + 1)^2 u''(z) + (6z^2 + 5)(z^2 + 1) u'(z) - 2z u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
ii) Si determinino due soluzioni indipendenti. [Suggerimento: può essere conveniente tenere fisso il punto $z = 0$.]

¹NB: per l'ammissione all'orale è necessario svolgere correttamente almeno un esercizio tra i primi due, e uno tra i secondi due.