

Complementi di Metodi Matematici per la Fisica

Docenti: Filippo Colomo e Giuliano Panico
Sessione Invernale, Martedì 11 Gennaio 2022
Compito scritto¹

- 1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{(x+1)^2 + a^2}{(x-1)^2 + a^2} \sin bx \, dx,$$

con $a, b > 0$.

- 2) Si valuti il termine dominante nell'espansione asintotica di

$$F(x) := \int_1^{\infty} e^{\frac{3}{2}axt^2} \frac{\cos \pi t}{\cosh xt^3} dt, \quad a \in \mathbb{R},$$

per $x \rightarrow \infty$. Si noti che il risultato dipende dal valore di a : si discutano i vari casi.

- 3) Si risolva il seguente problema di Cauchy utilizzando il metodo della variazione delle costanti

$$\begin{cases} u''(x) - 2u'(x) + 2u(x) = x^2 e^x \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases} .$$

- 4) Si consideri l'equazione differenziale

$$2z^3(1-z)u''(z) + z(2+z-4z^2)u'(z) - 2u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.

¹NB: per l'ammissione all'orale è necessario svolgere correttamente almeno un esercizio tra i primi due, e uno tra i secondi due.