Complementi di Metodi Matematici per la Fisica

Docenti: Filippo Colomo e Giuliano Panico
Sessione Autunnale, Martedì 14 Settembre 2021
Compito scritto[1]

1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{a\ln(1+bx)}{x^\gamma}\mathrm{d}x, \qquad a,b>0, \qquad 1<\gamma<2\,.$$

Si utilizzi il risultato ottenuto per calcolare

$$\int_0^\infty \frac{a\ln(1+bx)-b\ln(1+ax)}{x^2}\mathrm{d}x, \qquad a,b>0\,.$$

2) Data la funzione

$$G_n(x) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\mathcal{C}_0}\frac{1}{t^n}\frac{1}{\sqrt{t^2-2tx+1}}\mathrm{d}t\,,$$

con $\mathcal{C}_0$ circuito antiorario attorno all'origine, sufficientemente piccolo da non racchiudere alcun'altra singolarità dell'integrando, si determini il comportamento asintotico per grandi n di $G_n(\cosh\alpha)$. Si assuma, per semplicità, $\alpha>0$.

3) Si consideri il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\dfrac{du(x)}{dx}\right)+\dfrac{2}{x^4}u(x)=e^x \\ u(1)=u(2)=0 \end{cases}.$$

i) Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione alla luce del teorema dell'alternativa.

ii) Si determini la soluzione utilizzando il metodo della funzione di Green.

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$4(z^2+1)\,u''(z)+4iu'(z)-3u(z)=0\,,$$

dove i è l'unità immaginaria.

[1] NB: per l'ammissione all'orale è necessario svolgere correttamente almeno un esercizio tra i primi due, e uno tra i secondi due.

i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.

ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.

iii) Opzionale: Si determini la forma esplicita di almeno una delle due soluzioni. (Suggerimento: si utilizzino le formule per casi speciali delle funzioni ipergeometriche.)