

Complementi di Metodi Matematici per la Fisica

Docenti: Filippo Colomo e Giuliano Panico

Sessione Estiva, Lunedì 12 Luglio 2021

Compito scritto¹

- 1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} \ln x \, dx, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

- 2) Si valuti il termine dominante nell'espansione asintotica di

$$I_{\alpha}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty - i\pi} e^{x \sinh t - \alpha t} dt$$

per $x \rightarrow \infty$.

- 3) Si consideri il funzionale T definito da

$$(T, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi + \int_{1+k\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi \right]$$

con $k > 0$. Si dimostri che esso definisce una distribuzione in \mathcal{D}' . Si esprima T in termini di distribuzioni regolari e di distribuzioni singolari standard (in particolare la distribuzione valore principale di Cauchy). (Suggerimento: può essere conveniente utilizzare lo sviluppo in frazioni parziali.)

- 4) Si consideri l'equazione differenziale

$$z(z-1)u''(z) + \left(\frac{1}{2} + \frac{5z}{3}\right)u'(z) - \frac{1}{2z}u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.
- iii) Opzionale: Si determini la forma esplicita di una delle due soluzioni. (Suggerimento: si utilizzino le formule per casi speciali delle funzioni ipergeometriche.)

¹NB: per l'ammissione all'orale è necessario svolgere correttamente almeno un esercizio tra i primi due, e uno tra i secondi due.