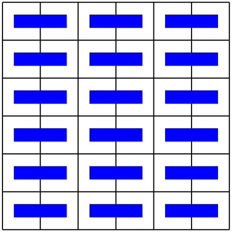
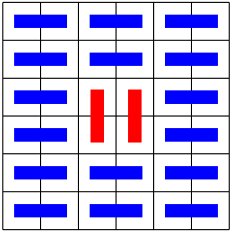
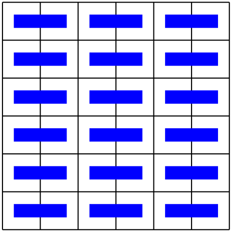
Un semplice esempio

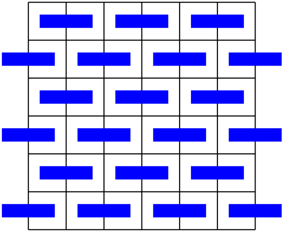


Difetto locale:

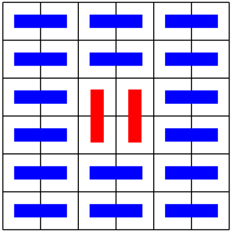


Un semplice esempio

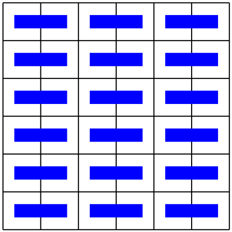


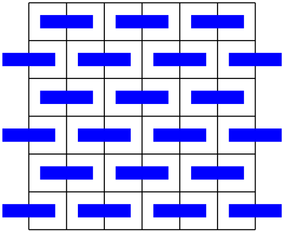


Difetto locale:

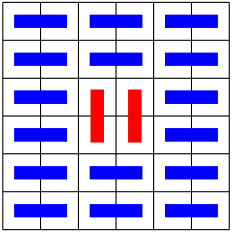


Un semplice esempio

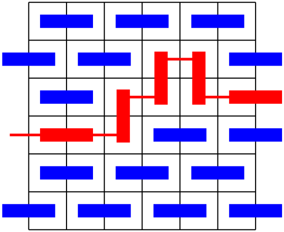




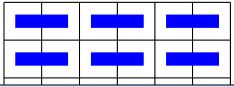
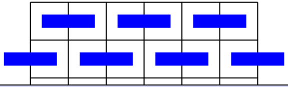
Difetto locale:



Linea di difetti:



Un semplice esempio

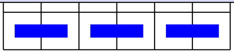
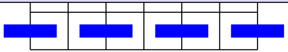



Vincoli di tipo geometrico
possono indurre effetti a lungo raggio

Opportune condizioni al contorno
possono modificare la termodinamica

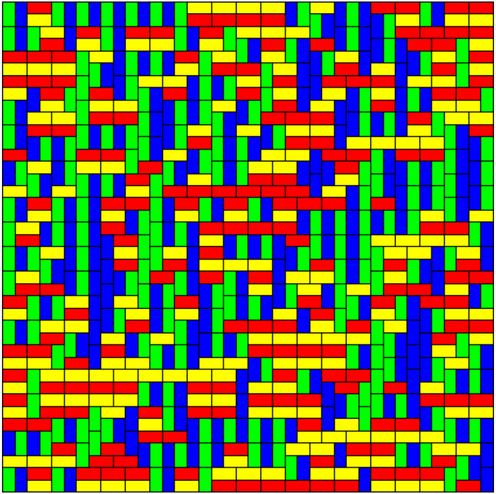
Parametri d'ordine, energia libera, ecc.
possono acquisire dipendenza spaziale

Possibilità di separazione spaziale tra fasi

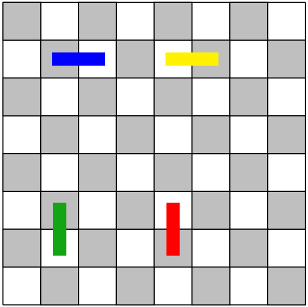



Tasselazione con domino di una regione quadrata

domino := ‘piastrella’ 2×1

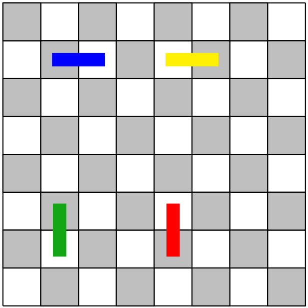


http://faculty.uml.edu/jpropp/



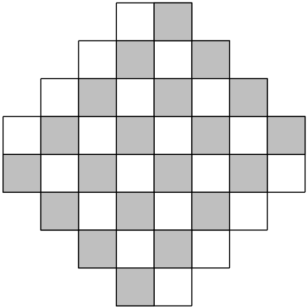
quadrato $N \times N$

$(N = 8)$



quadrato $N \times N$

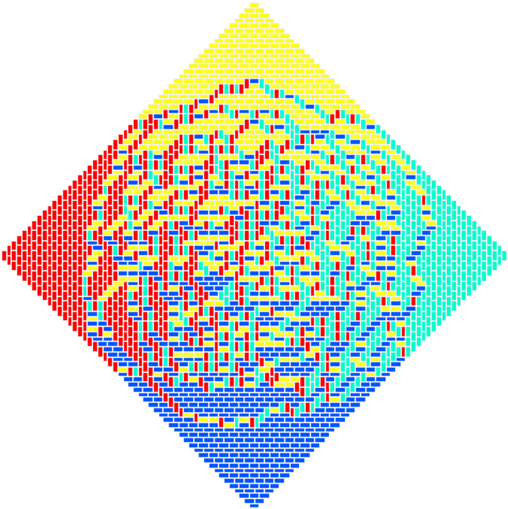
$(N = 8)$



Diamante Azteco di ordine N

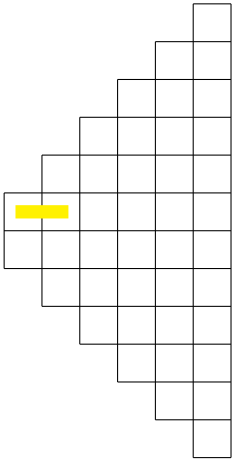
$(N = 4)$

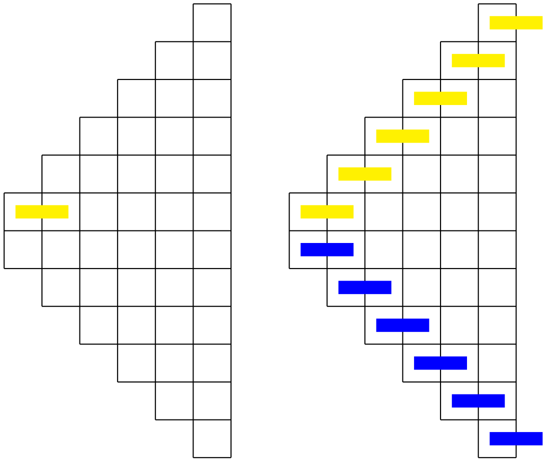
Tassellatura con domino di un diamante azteco

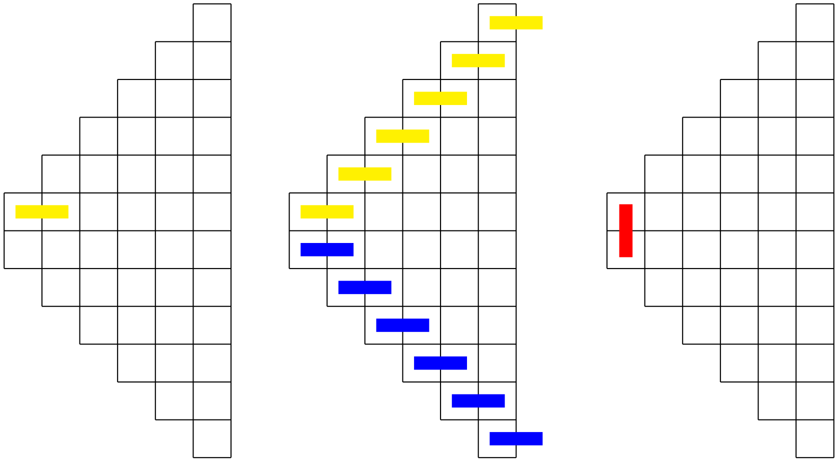


$N = 64$

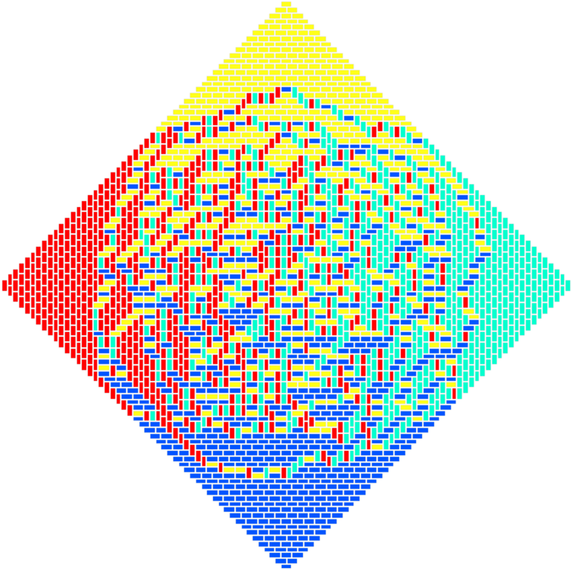
http://faculty.uml.edu/jpropp/







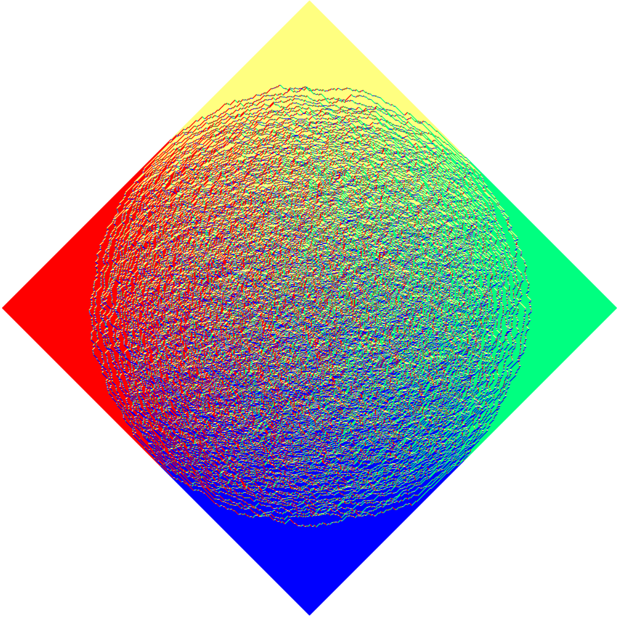
Tassellatura con domino di un diamante azteco



$N = 64$

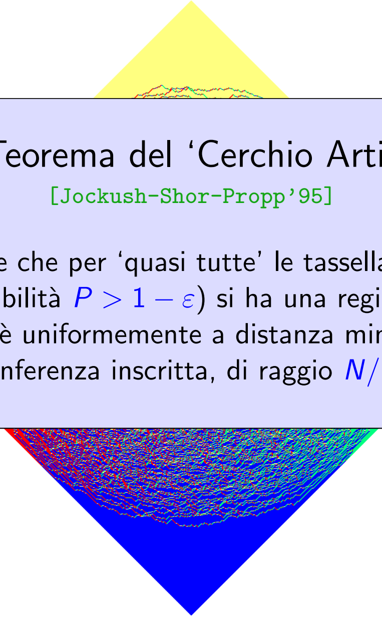
http://faculty.uml.edu/jpropp/

Tassellatura con domino di un diamante azteco



$N = 500$

Tassellatura con domino di un diamante azteco



Il Teorema del ‘Cerchio Artico’

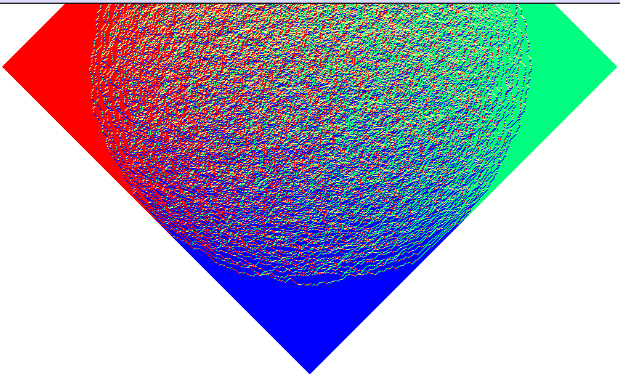
[Jockush-Shor-Propp’95]

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tale che per ‘quasi tutte’ le tassellature di $AD(N)$ (i.e., con probabilità $P > 1 - \varepsilon$) si ha una regione disordinata la cui frontiera è uniformemente a distanza minore di εN dalla circonferenza inscritta, di raggio $N/\sqrt{2}$.

$N = 500$

Tassellatura con domino di un diamante azteco

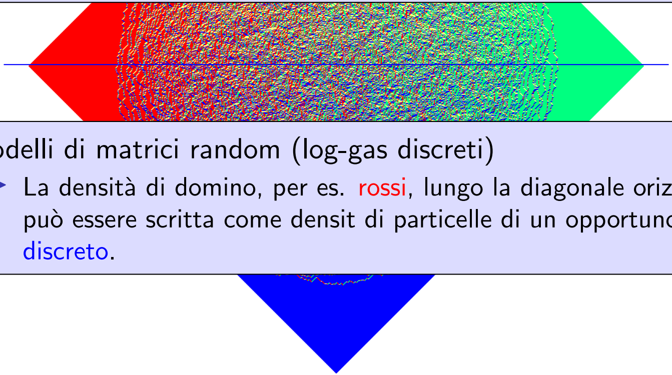
- Fluttuazioni dell'interfaccia:
  - fluttuazioni di ordine $\propto N^{1/3}$ [Johansson'00]
  - le fluttuazioni lungo la diagonale sono governate dalla distribuzione di Tracy-Widom [Johansson'02]
  - Interpretando N come un 'tempo'. il modello può essere visto come un 'processo di crescita', che, per grandi tempi risulta descritto dall classe di universalità KPZ universality class



$N = 500$

Tassellatura con domino di un diamante azteco

- Fluttuazioni dell'interfaccia:
  - fluttuazioni di ordine $\propto N^{1/3}$ [Johansson'00]
  - le fluttuazioni lungo la diagonale sono governate dalla distribuzione di Tracy-Widom [Johansson'02]
  - Interpretando N come un 'tempo'. il modello può essere visto come un 'processo di crescita', che, per grandi tempi risulta descritto dall classe di universalità KPZ universality class

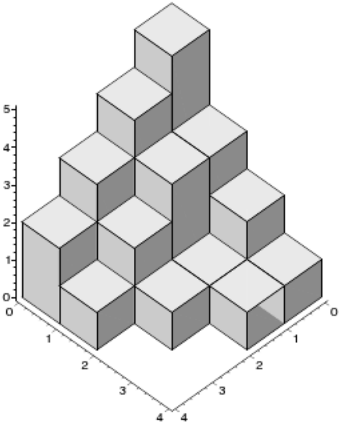


- Modelli di matrici random (log-gas discreti)
  - La densità di domino, per es. rossi, lungo la diagonale orizzontale può essere scritta come densit di particelle di un opportuno log-gas discreto.

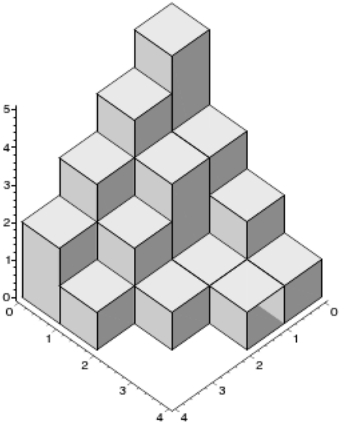
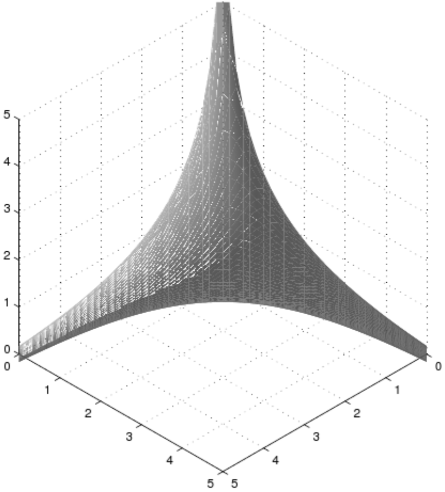
$N = 500$

Partizioni piane

(estensione 2-d delle partizioni degli interi, alias diagrammi di Young 3-d)



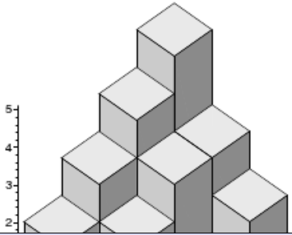
Partizioni piane
(estensione 2-d delle partizioni degli interi, alias diagrammi di Young 3-d)

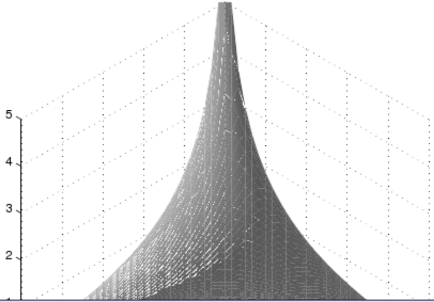



- ‘Corner melting’ di un cristallo [Ferrari-Spohn’02]
- Partizioni piane [Cerf-Kenyon’01] [Dobrushin-Kotecky-Shlosman’01] [Okounkov-Reshetikhin’01]

Partizioni piane

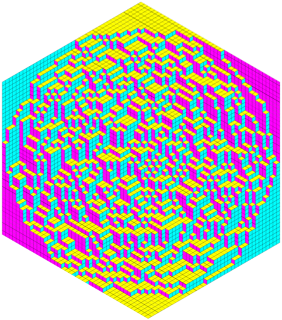
(estensione 2-d delle partizioni degli interi, alias diagrammi di Young 3-d)



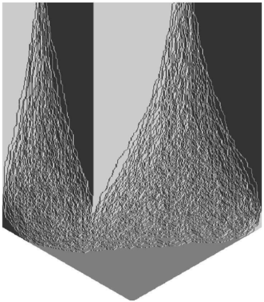


- equivalenti a tasselazioni con rombi di un reticolo triangolare o anche a dimeri su reticolo esagonale
- equivalenti a superfici discrete aleatorie
  - Fatto non banale: nel limite di scaling, la media statistica di queste superfici discrete tende ad una superficie continua 2-d, la 'forma limite'.
- Le fluttuazioni rispetto alla forma limite sono descritte dal campo conforme bosonico libero. [Kenyon'01]

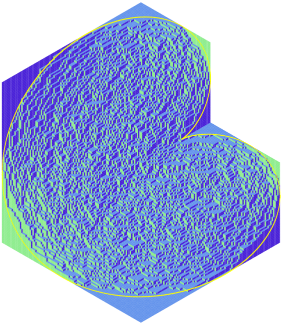
Numerosi altri esempi dello stesso fenomeno



Boxed plane partitions
[Cohn-Larsen-Propp'98]



Skewed plane partitions
[Okounkov-Reshetikhin'05]



Rhombi tiling
of generic domains
[Kenyon-Okounkov'05]

Di fatto tutti questi modelli sono varianti del nostro buon vecchio modello di 'dimeri su grafi regolari piani bipartiti', alias 'non-intersecting lattice path', alias fermioni liberi su reticolo.
Esiste una bellissima teoria unificata per il limite di scaling di tutti questi modelli, con prodonde implicazioni in geometria algebrica e combinatoria algebrica. [Kenyon-Okounkov-Sheffield'05-'07]

Domanda: e se considerassimo fermioni interagenti?

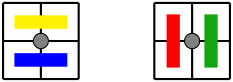
- Quanto sopravvive delle proprietà universali precedenti?
- Eventualmente, come sono modificate?
- E, tra l'altro, che tipo di interazione dovremmo considerare?

Domanda: e se considerassimo fermioni interagenti?

- Quanto sopravvive delle proprietà universali precedenti?
- Eventualmente, come sono modificate?
- E, tra l'altro, che tipo di interazione dovremmo considerare?

Torniamo al diamante azteco:

Se assegnamo un peso di Boltzmann e^{δ}
per ogni coppia di dimeri adiacenti paralleli:



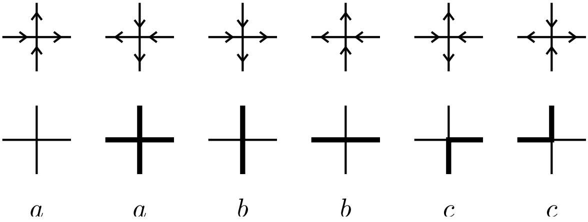
otteniamo un sistema integrabile [Kuperberg'96],

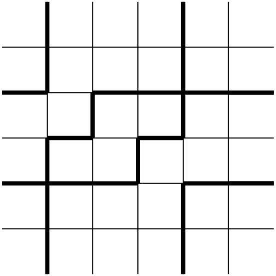
il 'modello a sei vertici' con parametro di anisotropia $\Delta = 2(1 - e^{\delta})$.

Il diamante azteco diventa si traduce in questo modello in una particolare scelta di condizioni al contorno di tipo fisso, dette di 'Domain Wall '.

Il modello a sei vertici

[Lieb'67] [Sutherland'67]

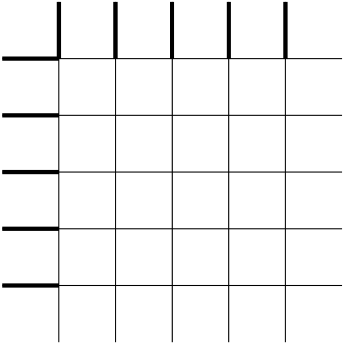


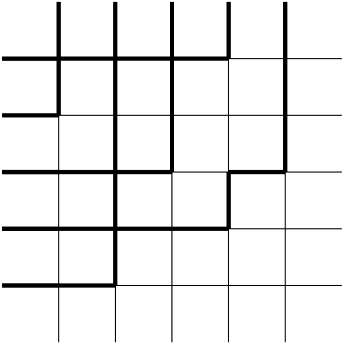


$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

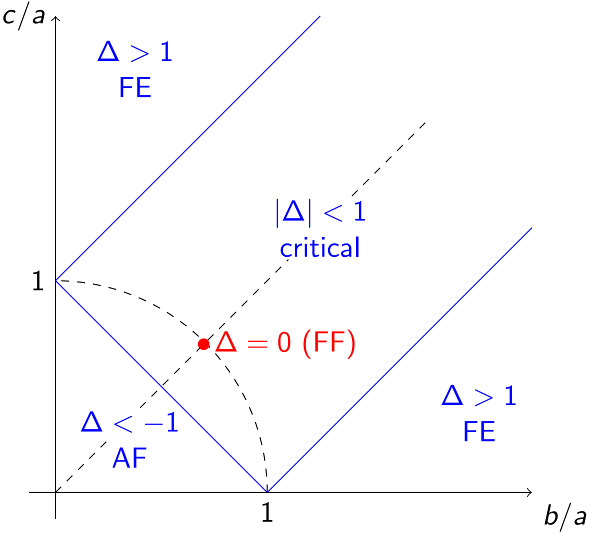
Le condizioni al contorno di tipo ‘Domain Wall’

[Korepin’82, Izergin’87]





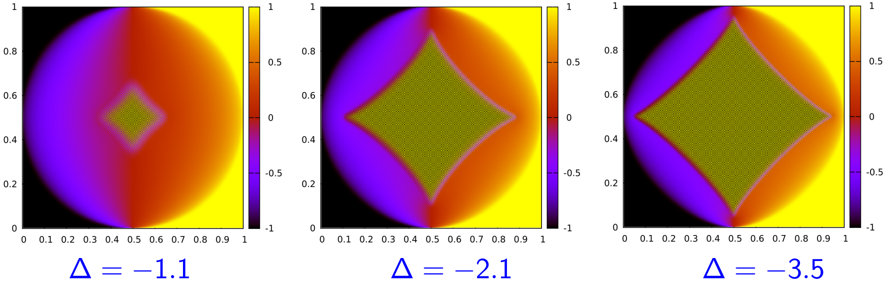
Il diagramma di fase



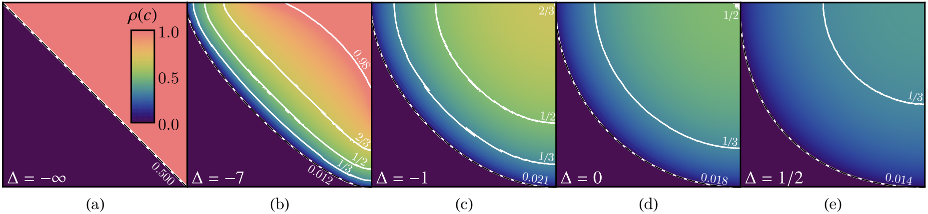
Quando $\Delta \neq 0$, cosa possiamo dire su:

- Curve artiche?
- Domini di forma generica?
- Forme limite?
- Fluttuazioni intorno alle forme limite?
- Fluttuazioni dell'interfaccia?

Giocando con Δ:



[Cugliandolo,Gonnella,Pellizzola'15]



[Keesman-Lamers'18]

$\Delta \neq 0$: cosa sappiamo?

- Curve artiche (DWBC)?
- Domini di forma generica?
- Forme limite?
- Fluttuazioni intorno alle forme limite?
- Fluttuazioni dell'interfaccia?

$\Delta \neq 0$: curve artiche (DWBC)

[FC-Pronko'09-'11]

$$x = F\left(\frac{\pi}{2} - \eta - \zeta\right) \qquad \zeta \in [0, \frac{\pi}{2} - \eta]$$
$$y = F(\zeta)$$

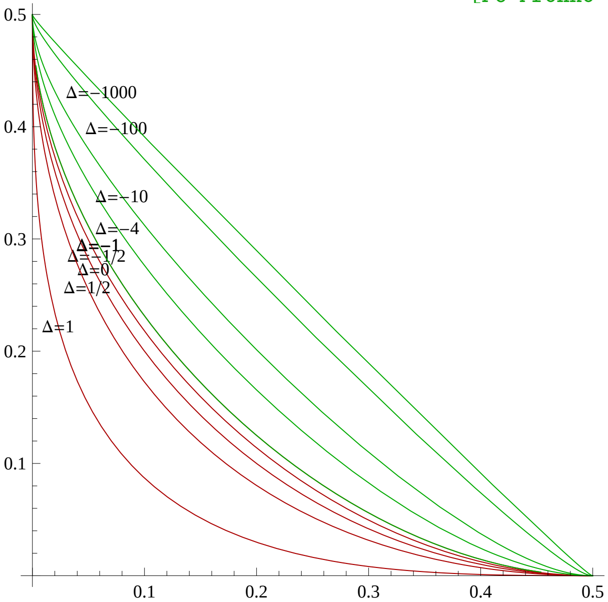
con

$$F(\zeta) = \frac{\sin^2\zeta \sin^2(\zeta + 2\eta)\cos(\zeta - \eta)\cos(\zeta + \eta)}{\sin 2\eta \cos\eta \big[\cos(\zeta - \eta)\sin\zeta + \cos(\zeta + \eta)\sin(\zeta + 2\eta)\big]}$$
$$\times \left\{ \frac{\cos^2\eta}{\sin^2\zeta \cos(\zeta + \eta)\cos(\zeta - \eta)} \right.$$
$$- \frac{\sin 2\zeta}{\cos(\zeta - \eta)\cos(\zeta + \eta)} \frac{\alpha \sin\alpha(\frac{\pi}{2} - \eta)}{\sin\alpha\zeta \sin\alpha(\zeta + \frac{\pi}{2} - \eta)}$$
$$\left. - \frac{\alpha^2 \sin\alpha(2\zeta + \frac{\pi}{2} - \eta)\sin\alpha(\frac{\pi}{2} - \eta)}{\sin^2\alpha\zeta \sin^2\alpha(\zeta + \frac{\pi}{2} - \eta)} \right\}.$$

NB: $\alpha = \frac{\pi}{\pi - \arccos\Delta}$, $\qquad \eta = \frac{1}{2}\arccos\Delta$, $\qquad$ a=b

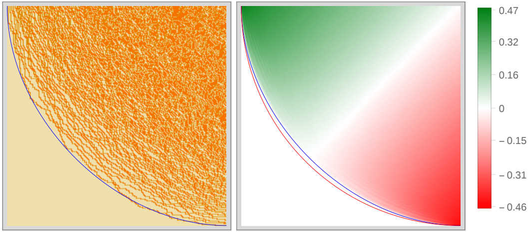
$\Delta \neq 0$: curve artiche (DWBC)

[FC-Pronko'09]
[FC-Pronko-ZinnJustin'10]

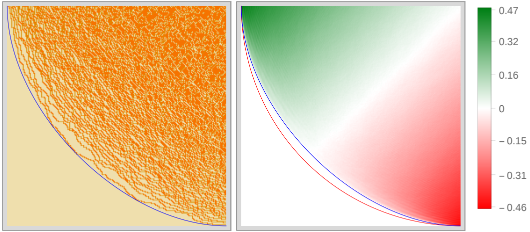


$\Delta \neq 0$: curve artiche (DWBC)

$\Delta = -1/2$



$\Delta = -1$

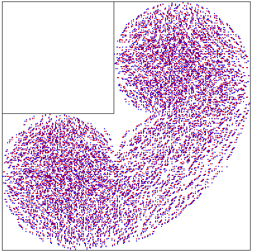


[Lyberg,Korepin,Viti'18]

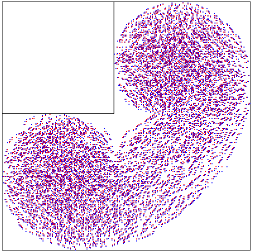
$\Delta \neq 0$: cosa sappiamo?

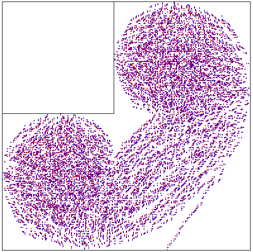
- Curve artiche (DWBC)?
- Domini di forma generica?
- Forme limite?
- Fluttuazioni intorno alle forme limite?
- Fluttuazioni dell'interfaccia?

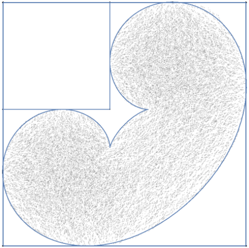
$\Delta \neq 0$: domini di forma generica



$\Delta \neq 0$: domini di forma generica



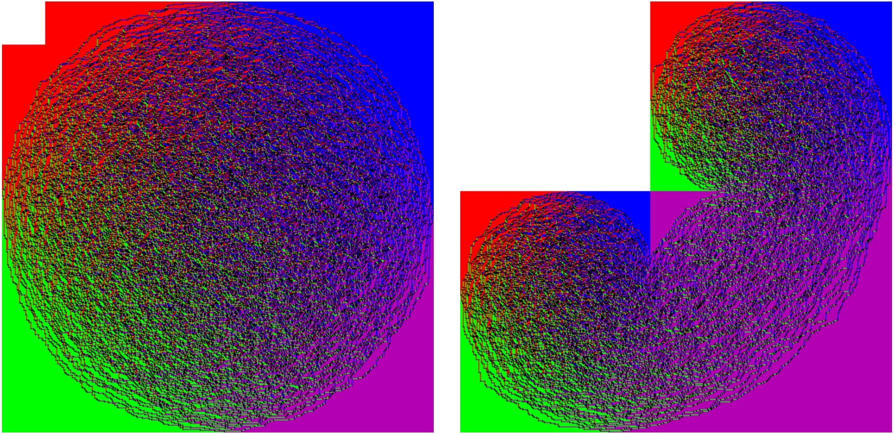




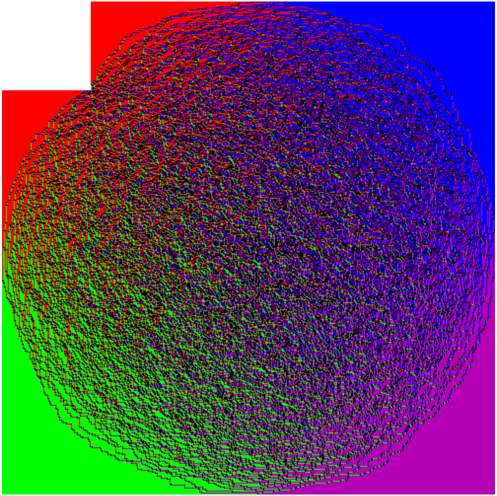
Un ricetta generale, detta 'Tangent Method' [FC-Sportiello'16] permette di terminare la curva artica, evidentemente una quantità di bulk, a partire di un'opportuna funzione di correlazione di bordo, generalemente molto più facile da calcolare.

Applicata con successo in svariate situazioni [Di Francesco-Guitter'17-'21] [Debyn-Granet-Ruelle'18-'21] [Corteel-Keating-Nicoletti'19] [Aggarwal'20]

Una transizione di fase indotta dalla geometria



Una transizione di fase indotta dalla geometria



Il calcolo esatto dell'energia libera in funzione del parametro di controllo R/N mostra una transizone di fase del 3^o ordine, alla Douglas-Kazakov

[FC-Pronko'15]

$\Delta \neq 0$: cosa sappiamo?

- Curve artiche (DWBC)?
- Domini di forma generica?
- Forme limite?
- Fluttuazioni intorno alle forme limite?
- Fluttuazioni dell'interfaccia?

$\Delta \neq 0$: forme limite

Vari risultati esatti, ma solamente per $\Delta > 1$

[Reshetikhin-Sridhar'16-'16]

[Borodin-Corwin-Gorin-Petrov'14-'19]

Completa conoscenza della forma limite,
ma per il solo modello a cinque vertici

[de Gier-Kenyon-Watson'19]

[Kenyon-Prause'20-'21]

$\Delta \neq 0$: cosa sappiamo?

- Curve artiche (DWBC)?
- Domini di forma generica?
- Forme limite?
- Fluttuazioni intorno alle forme limite?
- Fluttuazioni dell'interfaccia?

$\Delta \neq 0$: Fluttuazioni intorno alla forma limite

Un espansione perturbativa rigorosa, a piccoli Δ mostra che le fluttuazioni della funzione altezza sono ancora descritte dal campo bosonico conforme.

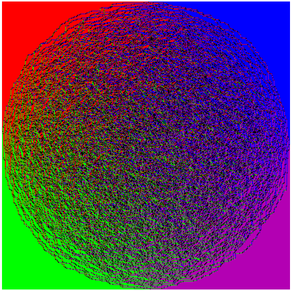
È stata anche ottenuta una valutazione perturbativa rigorosa della funzione di correlazione dimero-dimero.

[Giuliani-Mastropietro-Toninelli'14-'19]

$\Delta \neq 0$: cosa sappiamo?

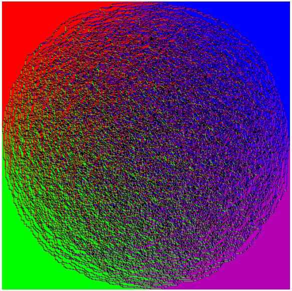
- Curve artiche (DWBC)?
- Domini di forma generica?
- Forme limite?
- Fluttuazioni intorno alle forme limite?
- Fluttuazioni dell'interfaccia?

$\Delta \neq 0$: fluttuazioni dell'interfaccia

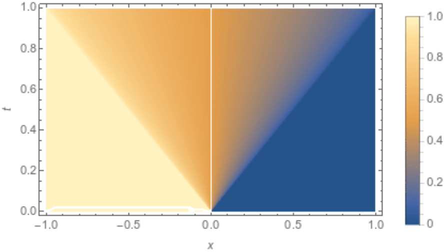


Da studi numerici recenti:
lo scaling di Tracy-Widom
è osservato con alta precisione
`[Prauhofer-Spohn, unpub.]`

$\Delta \neq 0$: fluttuazioni dell'interfaccia



Da studi numerici recenti:
lo scaling di Tracy-Widom
è osservato con alta precisione
[Prauhofer-Spohn, unpub.]



Predizione analitica:
nel quantum quench della
catena di spin XXZ
lo scaling di T-W è distrutto
[Collura-De Luca-Viti'19]

$\Delta \neq 0$: cosa sappiamo?

Importanti progressi nel corso dell'ultimo decade,
ma ancora moltissime questioni aperte.

Obiettivo ultimo:
valutazione della funzione a un punto in forma chiusa.

Problema difficile:
si ricordi che l'invarianza per traslazioni è rotta.

Mai perdere la speranza!