



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di
Scienze Matematiche
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in
Scienze Fisiche e Astrofisiche

Calcolo di funzioni di correlazione nel modello a sei vertici

Calculation of correlation functions in the six-vertex model

Relatore
Prof. Filippo Colomo

Candidato
Giuseppe Di Giulio

A Nonna Rosa

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Tassellature con i domino	5
1.2	Forme limite	8
1.3	<i>Quantum Quench</i> e separazione spaziale delle fasi	9
1.4	Modello a sei vertici	12
1.5	Organizzazione della tesi	13
2	Modello a sei vertici	15
2.1	Cenni storici	15
2.2	Formulazione statistica	17
2.3	Soluzione con condizioni al contorno periodiche	21
2.3.1	La matrice di trasferimento	21
2.3.2	Fasi del modello	22
2.3.3	Linee critiche	24
2.4	Influenza delle condizioni al contorno	25
2.5	Separazione spaziale delle fasi	26
2.6	Modello a 6 vertici e tassellatura con i domino	27
3	Integrabilità quantistica	30
3.1	Definizione di integrabilità quantistica	30
3.2	Modello di Lieb-Liniger e <i>Bethe ansatz</i> delle coordinate	31
3.2.1	Funzione d'onda di Bethe	31
3.2.2	<i>Bethe ansatz</i> e matrice S	33
3.2.3	Equazioni di Bethe	35
3.3	Catena di Heisenberg XXZ e <i>Bethe ansatz</i>	35
4	Metodo dello <i>scattering</i> inverso quantistico e <i>Bethe ansatz</i> algebrico	39
4.1	Nozioni di base	39
4.2	Modelli fondamentali di spin	44

<i>INDICE</i>	4
4.3 Modelli fondamentali a vertici	49
4.4 <i>Bethe ansatz</i> algebrico	54
5 Calcolo di funzioni di correlazione	63
5.1 Matrice di peso statistico	63
5.2 Funzione di partizione	65
5.3 Probabilità di formazione di regioni vuote	67
5.4 Probabilità di configurazione di riga	70
5.5 Calcolo di $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$	71
5.5.1 Rappresentazione in termini di polinomi ortogonali	71
5.5.2 Un'altra rappresentazione per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$	76
5.5.3 Rappresentazione tipo "funzione d'onda"	79
5.6 Dalla probabilità di configurazione di riga alla EFP	83
5.7 Funzione di correlazione ad un punto	86
5.8 Condizioni al contorno a parete di dominio parziali	88
5.9 Considerazioni conclusive	90
A Derivazione della rappresentazione di Izergin-Korepin	91
B Limite omogeneo	94
C Richiami sui polinomi ortogonali	96
D Dimostrazione dell'identità (5.67)	99
E Dimostrazione dell'identità di Cantini	101
F Densità di segmenti vuoti sul bordo	104

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Tassellature con i domino

Consideriamo una regione quadrata del piano, di dimensione $N \times N$, con N pari, e supponiamo di volerla ricoprire completamente e senza sovrapposizioni con rettangoli di dimensione 1×2 , d'ora in poi chiamati *domino*. Il numero di tassellature è dato da [1, 2]

$$\mathcal{N}_N^{quad} = \prod_{j=1}^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left[4 \cos^2 \left(\frac{\pi j}{N+1} \right) + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \right]. \quad (1.1)$$

Siamo interessati alle tassellature aleatorie, estratte con distribuzione di probabilità uniforme tra le \mathcal{N}_N^{quad} possibili. Ci aspettiamo che una tipica tassellatura sia disordinata (figura 1.1). Si possono certamente osservare anche tassellature aleatorie con regioni ordinate più o meno estese, ma la loro probabilità decresce all'aumentare di N , in accordo con i principi della teoria della probabilità.

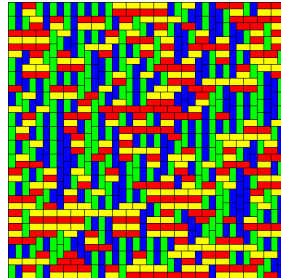


Figura 1.1: Tipica tassellatura di una regione quadrata di dimensione 40×40 (immagine di J.Propp).

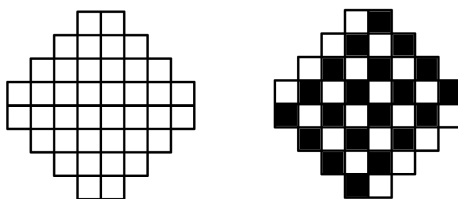


Figura 1.2: Diamante azteco di ordine 4. Nella figura a destra, abbiamo assegnato ai quadrati la colorazione a scacchiera a cui faremo riferimento nel seguito.

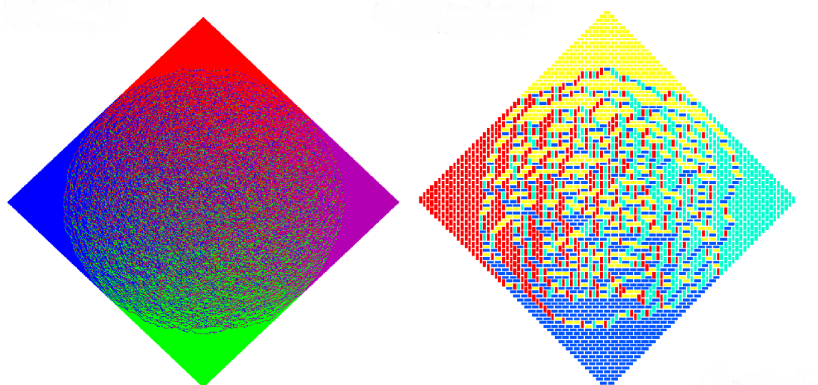


Figura 1.3: Tipiche tassellature aleatorie con distribuzione uniforme di diamanti aztechi. Il diamante a sinistra è di ordine 500, mentre quello a destra è di ordine 50 (immagine di J.Propp).

Consideriamo ora le tassellature di una regione a forma di diamante azteco di ordine N (figura 1.2). Il numero di tassellature distinte è dato da [3]

$$\mathcal{N}_N^{\text{aztec}} = 2^{\frac{N^2+N}{2}}. \quad (1.2)$$

Tipiche tassellature aleatorie con distribuzione uniforme sono riportate in figura 1.3. Osserviamo la formazione di regioni ordinate nei quattro angoli del diamante e di una regione centrale disordinata, approssimativamente circolare. Questo fenomeno si rinforza al crescere di N ; la sua formalizzazione matematica è legata al seguente teorema [4]:

Teorema (*Teorema del cerchio artico*). *Fissato $0 < \varepsilon < 1$, per ogni N sufficientemente grande, le tassellature del diamante azteco di ordine N presentano, con probabilità pari a $1 - \varepsilon$, una regione disordinata la cui frontiera giace uniformemente entro una distanza εN dalla circonferenza inscritta nel diamante.*

Riscalando di un fattore δ la dimensione minore del domino, questo enunciato rigoroso esprime il fatto che nel limite $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, con $N\delta = 1$ (detto limite di *scaling*), la frontiera della regione disordinata è la circonferenza di raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, inscritta nel diamante.

Dal punto di vista fisico, il modello discusso presenta due aspetti interessanti:

1. il comportamento del modello nel limite termodinamico risulta dipendere dalle condizioni al contorno;
2. particolari scelte di condizioni al contorno inducono, nel limite termodinamico, il fenomeno di *separazione spaziale delle fasi*, ovvero l'emergenza di regioni ordinate (o congelate) e disordinate (o temperate), nettamente separate da curve "artiche"¹.

Questi aspetti sono stati osservati, in numerose declinazioni, tramite esperimenti numerici, in molti altri modelli: ne sono esempi i diagrammi di Young con misura di Plancherel [5, 6], lo scioglimento di cristalli cubici [7, 8], le partizioni piane [9] e i processi di Schur [10].

Riguardo al primo punto, ricordiamo dai principi della meccanica statistica che le proprietà termodinamiche di un sistema non dipendono dalla scelta delle condizioni al contorno, purché le interazioni decrescano in modo sufficientemente veloce con la distanza. Il modello considerato, seppure non presenti nessuna interazione tra i domino, non soddisfa questa ipotesi poiché la condizione che i domino debbano ricoprire perfettamente la regione senza sovrapporsi può indurre correlazioni a lungo raggio: una modifica locale della tassellatura si ripercuote sui domino vicini.

Questi aspetti sono ormai pienamente compresi in maniera analitica per le tassellature con domino e, più in generale, per tutti i modelli di dimeri su grafi planari bipartiti [11]-[13]. Dal punto fisico, questi possono essere ricondotti a modelli di fermioni discreti e non interagenti.

Sarebbe interessante capire in che modo questi fenomeni siano influenzati dalla presenza di interazioni tra i fermioni, tuttavia il problema si complica enormemente ed i risultati analitici in proposito sono ancora pochissimi [14]-[26]. Data la natura non perturbativa dei fenomeni discussi è conveniente restringersi ad una particolare classe di interazioni, quelle dette integrabili, che permettono, almeno in linea di principio, il calcolo di risultati esatti.

In particolare, nel modello considerato, è possibile introdurre un'interazione tra i domino che preservi l'integrabilità del sistema [3]; il modello risultante è il *modello a sei vertici* ed è il principale oggetto di questa tesi.

¹Questo nome è legato all'analogia tra questa curve, che dividono le regione congelate da quelle temperate, e il circolo polare artico sul globo terrestre.

1.2 Forme limite

Consideriamo il diamante azteco di ordine N come una regione di reticolo quadrato bidimensionale di passo unitario; questo induce naturalmente una suddivisione in quadrati di dimensione 1×1 ai cui vertici è associata una coppia di coordinate intere (m, n) , rispetto ad un sistema di assi paralleli alle diagonali, con origine nel centro del diamante. Coloriamo le facce del reticolo di bianco o di nero in modo che facce con spigoli in comune abbiano colori diversi; assumiamo convenzionalmente che i quadrati all'estremo sinistro di ogni riga nella parte superiore del diamante siano bianchi (figura 1.2).

Ad ogni tassellatura è possibile assegnare in modo univoco una funzione altezza $h_N(m, n)$ definita sui vertici dei quadrati (contenuti nel diamante) con le seguenti proprietà:

- $h_N(-N, 0) = 0$;
- l'altezza aumenta di un'unità se ci spostiamo lungo uno spigolo che non biseca nessun domino con un quadrato bianco sulla destra, mentre diminuisce di un'unità se il quadrato sulla destra è nero.

Il limite di *scaling* della funzione altezza è detto *forma limite* ed è definito come

$$h(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} h_N([xN], [yN]), \quad x, y \in [-1, 1], \quad |x \pm y| \leq 1, \quad (1.3)$$

dove, dato un numero reale a ,

$$[a] = \begin{cases} \lfloor a \rfloor & \text{se } a \geq 0, \\ \lceil a \rceil & \text{se } a < 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

con $\lfloor a \rfloor$ e $\lceil a \rceil$ che indicano rispettivamente la parte intera inferiore e superiore di a .

La funzione altezza e la forma limite sono collegate ad alcune osservabili del modello, come per esempio la densità di domino orizzontali e quella di domino verticali².

²Ad essere precisi, in ogni tassellatura, sono presenti due tipi diversi di domino verticali che differiscono a seconda che la loro parte superiore si trovi su un quadrato nero o su uno bianco. La funzione $p(x, y)$ descrive la densità di uno solo di questi tipi di domino. Analogamente, si hanno due tipi di domino orizzontali.

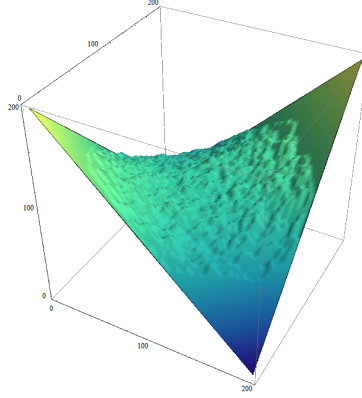


Figura 1.4: Funzione altezza relativa alla tassellatura con i domino del diamante azteco di ordine 100; nel limite di *scaling*, questa diventerà la forma limite del modello.

Si dimostra che la densità di uno dei due tipi di domino verticali è data da [27]

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \text{ e } x > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1-2x}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2-y^2}}\right) & \text{se } x^2 + y^2 < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \text{ e } x < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Per simmetria, le densità degli altri tre tipi di domino sono $p(-y, x)$, $p(-x, -y)$ e $p(y, -x)$.

Se definiamo il vettore polarizzazione come

$$\vec{\mathcal{P}} := (2p(-x, -y) - 2p(x, y), 2p(y, -x) - 2p(-y, x)), \quad (1.6)$$

la *forma limite* soddisfa la relazione

$$\vec{\mathcal{P}} = \left(\frac{\partial h(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right), \quad (1.7)$$

che realizza il suddetto collegamento tra $h(x, y)$ e le densità di domino.

1.3 *Quantum Quench* e separazione spaziale delle fasi

I fenomeni di separazione spaziale delle fasi e l'insorgere di curve artiche risultano essere collegati a fenomeni di "cono luce" che si presentano nello

studio del *Quantum Quench* di catene di spin unidimensionali. Si parla di *Quantum Quench* quando abbiamo un sistema in un dato stato iniziale, eventualmente autostato di una hamiltoniana H_0 , che viene fatto evolvere tramite una hamiltoniana H . Il *Quantum Quench* è uno dei principali e più semplici protocolli per lo studio della dinamica quantistica fuori dall'equilibrio. Per illustrare un esempio di tale fenomeno, consideriamo una catena di spin XX0 in campo nullo con N siti, la cui hamiltoniana è

$$H_{XX0} = - \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left(S_n^{(x)} S_{n+1}^{(x)} + S_n^{(y)} S_{n+1}^{(y)} \right), \quad (1.8)$$

dove N è pari per comodità. Gli operatori $S_n^{(\alpha)}$, $n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$, $\alpha = x, y, z$, sono definiti come $S_n^{(\alpha)} = \frac{\sigma_n^{(\alpha)}}{2}$, dove $\sigma_n^{(\alpha)}$ sono le matrici di Pauli. Assumiamo condizioni al contorno periodiche, ovvero, $S_{n+N}^{(\alpha)} = S_n^{(\alpha)}$, $n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$, $\alpha = x, y, z$.

Dato un generico stato del sistema $|\psi\rangle$, la componente α della magnetizzazione è definita da

$$M_n^{(\alpha)} := \langle \psi | S_n^{(\alpha)} | \psi \rangle, \quad n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}, \quad \alpha = x, y, z. \quad (1.9)$$

Definiamo la densità di spin orientati negativamente lungo l'asse z ("particelle") come

$$\rho_n := \frac{1}{2} - M_n^{(z)}. \quad (1.10)$$

Consideriamo uno stato iniziale $|\psi_0\rangle$, al tempo $t = 0$, costruito in modo tale che, su tutti i siti con $n < 0$, gli spin siano orientati negativamente lungo z , mentre, sui siti con $n > 0$, siano orientati in verso opposto (stato iniziale a parete di dominio): in questo stato, la densità è

$$\rho_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } n < 0, \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Per $t > 0$, si ha $|\psi(t)\rangle = e^{-iH_{XX0}t} |\psi_0\rangle$; le "particelle" cominciano a fluire da sinistra verso destra e, intorno a $n = 0$, si forma una regione disordinata in cui $0 < \rho_n < 1$. Tale regione si espande all'aumentare di t andando a formare un "cono luce". Nel limite in cui $N, n, t \rightarrow \infty$, con $\frac{n}{t}$ fissato, si trova [31]

$$\rho_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{n}{t} < -1, \\ \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{n}{t}\right) & \text{se } -1 < \frac{n}{t} < 1, \\ 0 & \text{se } \frac{n}{t} > 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

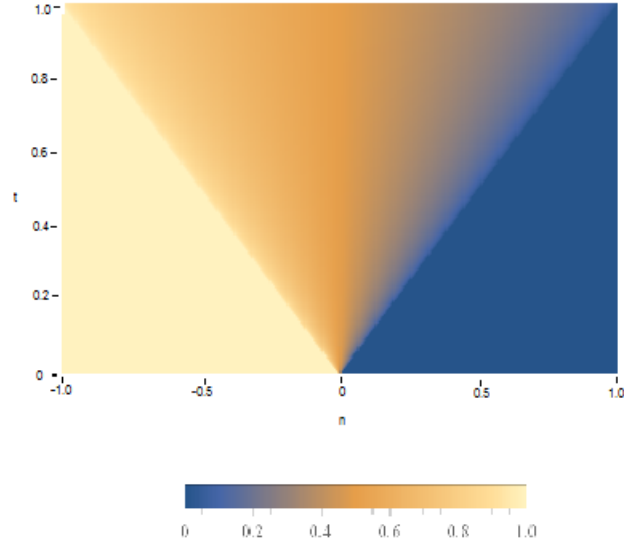


Figura 1.5: Profilo spaziotemporale della densità $\rho_n(t)$.

Si noti che, tramite il cambio di variabili,

$$\begin{cases} n = \frac{1-2x}{\sqrt{2}}, \\ t = \sqrt{(x-1)^2 - y^2}, \end{cases} \quad (1.13)$$

si ottiene (1.5) e il "cono luce" viene mappato nella circonferenza artica della tassellatura con domino del diamante azteco. Questa corrispondenza è più profonda di un semplice cambio di coordinate; infatti, calcolando il valore di aspettazione di ρ_n sullo stato $|\tilde{\psi}_{\frac{N}{2}}\rangle := e^{-\frac{N}{2}H_{XX0}}|\psi_0\rangle$, ottenuto tramite evoluzione in tempo immaginario e discreto, per $\frac{N}{2}$ passi temporali, si trova (1.5) [29].

Questa corrispondenza tra la catena XX0 e la tassellatura con i domino è uno dei tanti esempi della nota corrispondenza tra modelli quantistici $(1+1)$ -dimensionali e modelli bidimensionali di meccanica statistica.

La catena XX0 è un esempio di modello a fermioni liberi e la sua dinamica di non equilibrio è relativamente semplice e totalmente compresa. La frontiera attuale per i problemi di *Quantum Quench* è costituita dal modello XXZ, prototipo di catena di spin integrabile, la cui hamiltoniana è

$$H_{XXZ} = - \sum_{n=1}^N \left(S_n^{(x)} S_{n+1}^{(x)} + S_n^{(y)} S_{n+1}^{(y)} + \Delta S_n^{(z)} S_{n+1}^{(z)} \right). \quad (1.14)$$

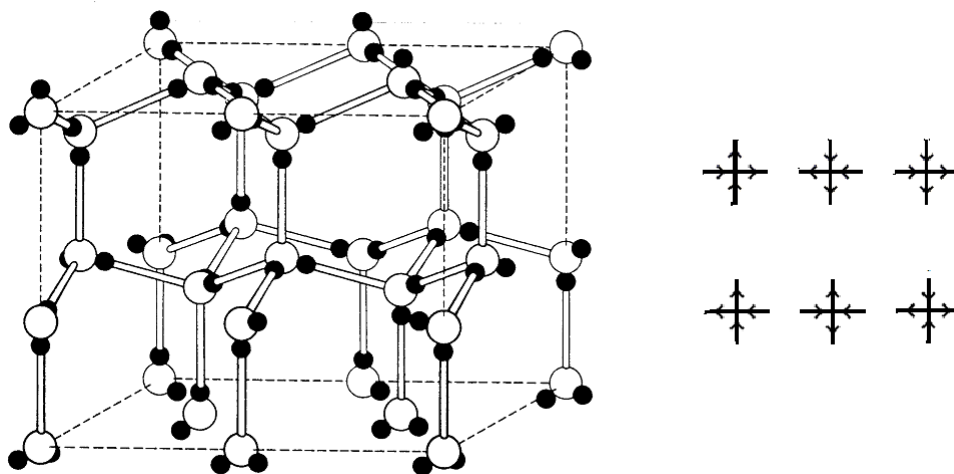


Figura 1.6: A sinistra, una rappresentazione di un reticolo di ghiaccio, in cui le sfere bianche indicano gli atomi di ossigeno e quelle nere gli atomi di idrogeno. A destra, le sei configurazioni di vertice nel modello a sei vertici bidimensionale.

Il corrispondente modello di meccanica statistica è il modello a sei vertici. La hamiltoniana (1.8) è il caso con $\Delta = 0$ (anche detto dei fermioni liberi) di H_{XXZ} e, corrispondentemente, la tassellatura con i domino è il regime con $\Delta = 0$ del modello a sei vertici.

1.4 Modello a sei vertici

Il modello a sei vertici è un modello di fisica statistica classica su reticolo, introdotto da Slater negli anni '40 per descrivere il comportamento di alcuni cristalli caratterizzati da un reticolo con vertici tetravalenti. I possibili stati del modello possono essere descritti disponendo una freccia lungo ogni spigolo del reticolo, orientata verso uno dei due siti adiacenti, compatibilmente con la *ice rule*: delle quattro frecce che circondano ogni sito, due sono entranti e due sono uscenti. Questo limita le configurazioni di frecce intorno a ciascun sito a sole sei possibilità (da cui il nome del modello).

Le prime soluzioni esatte per il caso bidimensionale sono state ottenute, nel 1967, da Lieb e, nel caso più generale, da Sutherland. Queste soluzioni si riferiscono al modello con condizioni periodiche al contorno. Altre condizioni al contorno interessanti sono quelle fisse, un esempio delle quali sono le condizioni al contorno a parete di dominio (indicate anche con DWBC, acronimo dall'inglese *Domain Wall Boundary Conditions*), introdotte da Korepin in

[47]. Nel limite di *scaling*, definito come limite in cui il numero di siti reticolari tende a infinito in ogni direzione, il passo reticolare tende a zero e le dimensioni del reticolo rimangono costanti, le DWBC inducono separazione spaziale delle fasi.

1.5 Organizzazione della tesi

Il modello a sei vertici bidimensionale, modello interagente e integrabile, esibisce, anche nel limite termodinamico, dipendenza dalle condizioni al contorno e, con particolari condizioni al contorno fisse, nel limite di *scaling*, presenta separazione spaziale delle fasi e forme limite. La presenza di questi fenomeni e la relazione con la tassellatura con i domino e i fenomeni di *Quantum Quench* ci motivano a studiare il modello e le sue proprietà.

In questo ambito l'obiettivo è il calcolo delle espressioni esatte di curve artiche e forme limite del modello con generiche condizioni al contorno fisse. Data l'estrema difficoltà di questo programma, ci limitiamo per il momento al caso di condizioni al contorno a parete di dominio.

Una strategia per la descrizione analitica di questi fenomeni consiste nel calcolare esattamente opportune funzioni di correlazione del modello e studiarne il comportamento asintotico nel limite di *scaling*. In [63]-[68], sono state ottenute espressioni esatte per diverse funzioni di correlazione; il calcolo di queste quantità si basa sul metodo dello *scattering* inverso quantistico e sul formalismo del *Bethe ansatz* algebrico.

Le funzioni di correlazione calcolate in [63]-[68] permettono di descrivere solo alcuni aspetti del comportamento del modello nel limite di *scaling*; la funzione che fornisce l'informazione più completa a riguardo è la funzione di correlazione ad un punto (anche detta polarizzazione). Il calcolo di questa quantità risulta estremamente complicato, anche a causa delle condizioni al contorno fisse che rompono l'invarianza per traslazione del modello.

L'obiettivo della tesi è quello di fare progressi nel calcolo esatto della funzione di correlazione ad un punto. A tal fine, abbiamo costruito una rappresentazione per la cosiddetta probabilità di configurazione di riga (ovvero la probabilità di avere, su una data riga, una certa configurazione di frecce). A partire da questa, abbiamo fornito una derivazione alternativa per il calcolo di un'altra funzione di correlazione, la probabilità di formazione di regioni vuote, già nota per altra via [65]. Le tecniche e la procedura sviluppate per questo calcolo, sono state poi estese al calcolo di un'espressione per la polarizzazione.

Inoltre è stata ottenuta una rappresentazione integrale per la funzione di partizione del modello con le cosiddette condizioni al contorno a parete di

dominio parziali, altro esempio in cui si osserva separazione spaziale delle fasi. In questo caso, per $\Delta = 0$, nel limite di *scaling*, è stata calcolata la densità di frecce di un certo tipo lungo uno dei bordi del reticolo: questa quantità è direttamente collegata al gradiente della forma limite del modello lungo tale bordo.

Il lavoro è organizzato come segue. Nel capitolo 2, viene introdotto il modello a sei vertici e ne vengono discusse le proprietà fisiche rilevanti. Nel capitolo 3, viene discussa la nozione di integrabilità quantistica e viene descritto il metodo del *Bethe ansatz* delle coordinate, mentre, nel capitolo 4, vengono trattati in dettaglio il metodo dello *scattering* inverso quantistico e il formalismo del *Bethe ansatz* algebrico. Infine, nel capitolo 5, il modello a sei vertici è inquadrato nel formalismo del metodo dello *scattering* inverso quantistico e sono riportate le espressioni esatte di alcune funzioni di correlazione. Vengono poi calcolate le rappresentazioni per la probabilità di configurazione di riga e per la funzione di partizione del modello con DWBC parziali. Viene quindi fornita una costruzione alternativa per una rappresentazione della probabilità di formazione di regioni vuote; questa procedura viene applicata al caso della funzione di correlazione ad un punto, permettendo di ottenere anche per questa una rappresentazione integrale.

Capitolo 2

Modello a sei vertici

2.1 Cenni storici

A temperature molto basse, il ghiaccio ha un'entropia residua. Negli anni '30, è stata misurata sperimentalmente con il risultato $s_{sp} \simeq 0.82 \frac{\text{cal}}{\text{°K} \cdot \text{mol}}$, intorno a 10°K [32].

Nel ghiaccio, gli atomi di ossigeno si dispongono sui vertici di un reticolo tetraedrico, mentre gli ioni di idrogeno su ciascuno degli spigoli tra due siti adiacenti, in prossimità di uno dei due ioni di ossigeno. Possiamo perciò costruire un modello su reticolo in cui i gradi di libertà si dispongano sugli spigoli e ammettano due possibili stati: descriviamoli tramite delle frecce disposte lungo ciascuno spigolo. Le frecce, fisicamente, sono associate ai momenti di dipolo elettrico che si formano tra due siti reticolari (detti anche vertici) a causa della posizione dello ione di idrogeno lungo lo spigolo. La funzione di partizione sarà

$$Z = \sum_{conf} e^{-\frac{E_c}{k_B T}}, \quad (2.1)$$

dove T è la temperatura ed E_c è l'energia associata ad ognuna delle configurazioni su cui si effettua la somma. Richiediamo la neutralità elettrica locale sul reticolo: questo può essere realizzato supponendo che siano ammesse, per ogni sito, solo le configurazioni in cui si hanno due ioni di idrogeno che si avvicinano al sito e due che se ne allontanano (e, dunque, due frecce entranti e due frecce uscenti rispetto ad ogni vertice). Questo vincolo, noto come *ice rule*, riduce il numero delle configurazioni di vertice ammesse da 16 a 6. Un modello su reticolo tetravalente in cui, per ogni vertice, deve essere soddisfatto questo vincolo è detto *modello a sei vertici*.

In un sistema su un reticolo con N siti, l'entropia molare è definita come

$$s := N_A k_B \mathcal{W}, \quad (2.2)$$

dove

$$\mathcal{W} := \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \Omega_N^{\frac{1}{N}} \quad (2.3)$$

con Ω_N numero delle configurazioni possibili e N_A numero di Avogadro. Per riprodurre la presenza di entropia residua in un modello statistico, supponiamo che le configurazioni di vertice siano isoenergetiche (si può supporre, scegliendo opportunamente lo zero, che l'energia sia nulla). In questo caso, calcolare la funzione di partizione significa contare tutte le possibili configurazioni, ovvero, $\Omega_N = Z$.

Per un reticolo tridimensionale, si può stimare \mathcal{W} supponendo che gli spigoli e le configurazioni di vertice siano indipendenti [34]. Si trova

$$\Omega_N^{(3D)} = 2^{2N} \left(\frac{6}{16} \right)^N, \quad (2.4)$$

in cui il fattore $\frac{6}{16}$ viene dal fatto che sono ammesse solo 6 configurazioni di vertice su 16. Da questa,

$$\mathcal{W}_{3D} = \ln \left(\frac{3}{2} \right) \Rightarrow s_{3D} = N_A k_B \ln \left(\frac{3}{2} \right) \simeq 0.81 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K} \cdot \text{mol}}. \quad (2.5)$$

Se invece si considera un reticolo bidimensionale, il modello può essere risolto esattamente, ottenendo [33]

$$\mathcal{W}_{2D} = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \Rightarrow s_{2D} = N_A k_B \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \simeq 0.86 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K} \cdot \text{mol}}. \quad (2.6)$$

Si noti che in questo calcolo di entropia configurazionale la dimensionalità del sistema ha un'influenza marginale. Il fattore determinante è la struttura di grafo del reticolo; in entrambi i casi infatti si ha un grafo tetravalente.

In recenti studi di natura sperimentale, è stato osservato, grazie all'ausilio di un microscopio elettronico a trasmissione, che, intrappolando l'acqua tra due strati di grafene, si formano, in regioni di dimensioni inferiori al micrometro, strutture ordinate su reticolo quadrato: queste sono state interpretate come porzioni di ghiaccio planare [35].

Un certo numero di cristalli, caratterizzati dalla presenza del legame a idrogeno, esibiscono una transizione di fase ferroelettrica o antiferroelettrica. Ciò significa che, al variare di un parametro, ad esempio la temperatura, si ha il passaggio da una fase a polarizzazione disordinata ad una ordinata (in cui le componenti del sistema si orientano tutte nella stessa direzione). Un esempio di tali cristalli è il diidrogenofosfato di potassio (KH_2PO_4) che, a circa $122^\circ K$, passa da una fase a polarizzazione nulla ad una spontaneamente polarizzata. La struttura di KH_2PO_4 è caratterizzata dai gruppi

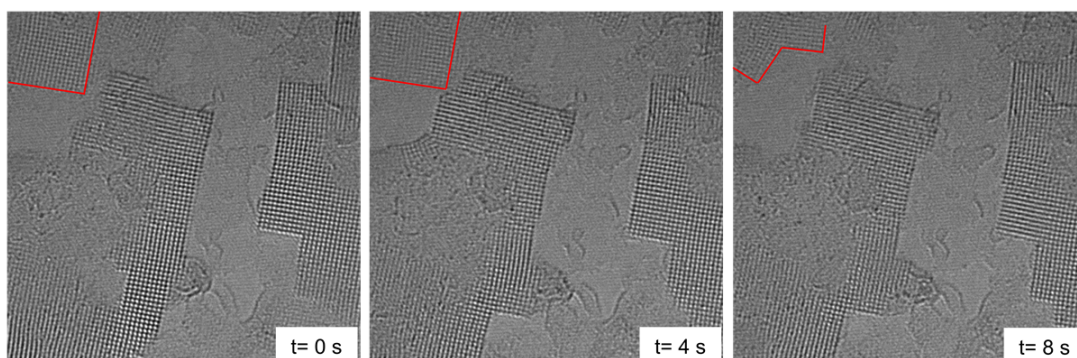


Figura 2.1: Formazione di strutture ordinate in un sistema composto da acqua tra due strati di grafene. L'osservazione è stata effettuata con un microscopio elettronico a trasmissione (figura tratta da [35]).

fosfato che si dispongono sui vertici di un reticolo tetraedrico. Come rivelato dagli esperimenti di *scattering* di neutroni, l'idrogeno si trova tra ogni coppia di gruppi fosfato. Di conseguenza, una configurazione del cristallo è caratterizzata dall'assegnazione delle posizioni degli ioni di idrogeno. Onsager (1939) fu il primo a supporre che la transizione ferroelettrica nel KH_2PO_4 fosse collegata al comportamento degli ioni di idrogeno.

Per descrivere questo sistema, possiamo considerare un modello a sei vertici, definito su un reticolo con struttura tetraedrica, con pesi di Boltzmann diversi per le varie configurazioni di vertice. Al variare del valore dei pesi, il modello risulta ferroelettrico o antiferroelettrico. Ad esempio, se la configurazione con peso maggiore è quella in cui i dipoli elettrici si orientano nella stessa direzione, allora, a bassa temperatura, ci sarà una polarizzazione spontanea non nulla lungo tale direzione e avremo così ordine ferroelettrico.

Recentemente sono stati costruiti in laboratorio sistemi magnetici bidimensionali con interazioni dipolari frustrate [37]-[40]. Una possibile descrizione teorica per questi sistemi è ottenuta tramite un modello a sedici vertici in cui le dieci configurazioni di vertice non contenute in figura 4.1 hanno pesi di Boltzmann diversi da zero, ma comunque molto minori di quelli delle altre sei. La *ice rule* non vale quindi in modo esatto, ma il modello dà comunque una buona descrizione qualitativa di questi sistemi [41].

2.2 Formulazione statistica

Il modello a sei vertici bidimensionale è un modello classico di meccanica statistica su reticolo quadrato, in cui gli stati sono ottenuti disponendo

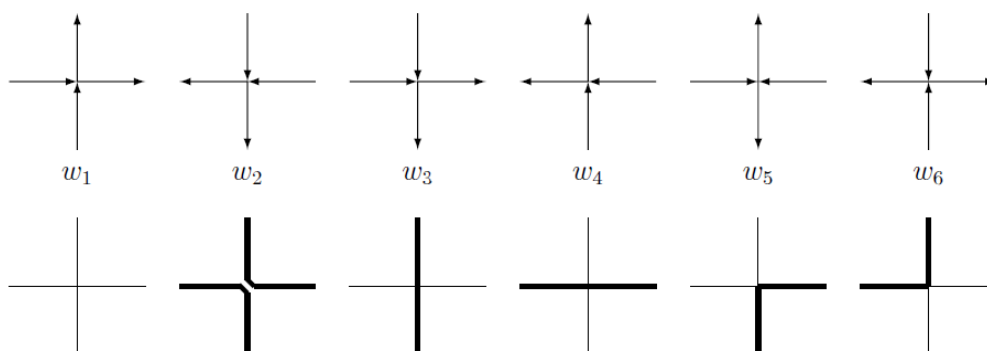


Figura 2.2: Configurazioni di vertice compatibili con la *ice rule* e relativi pesi statistici. Nella parte inferiore è riportata la rappresentazione grafica in termini di segmenti pieni e segmenti vuoti.

una freccia lungo ogni spigolo del reticolo, orientata verso uno dei due siti adiacenti, compatibilmente con la *ice rule*.

Le sei possibili configurazioni di vertice sono mostrate in figura 2.2. Come illustrato, ogni configurazione di frecce può essere rappresentata come configurazione di segmenti pieni e segmenti vuoti. Si associano alle frecce che puntano in alto e a destra i segmenti vuoti e a quelle che puntano in basso e a sinistra i segmenti pieni. La *ice rule* comporta che i segmenti pieni siano disposti consecutivamente, formando cammini non intersecantesi che fluiscono da un bordo all'altro, senza interruzioni, lungo la direttrice Nord-Est/Sud-Ovest.

Chiamiamo spigoli esterni, gli spigoli che sono collegati ad un unico vertice. Fissare le frecce sugli spigoli esterni significa imporre le condizioni al contorno: le tipologie principalmente studiate sono le seguenti.

- *Condizioni al contorno periodiche*: il reticolo è reso periodico lungo entrambe le direzioni, identificando gli spigoli esterni di destra con quelli di sinistra e quelli superiori con quelli inferiori. Questo corrisponde a considerare il modello su un toro bidimensionale.
- *Condizioni al contorno fisse*: l'orientazione delle frecce lungo gli spigoli esterni è fissata. Un esempio di tali condizioni al contorno sono le condizioni al contorno *a parete di dominio*: dato il modello su un reticolo con N linee orizzontali e N linee verticali ($N \times N$), si impone che tutte le frecce verticali sul bordo inferiore e su quello superiore puntino verso

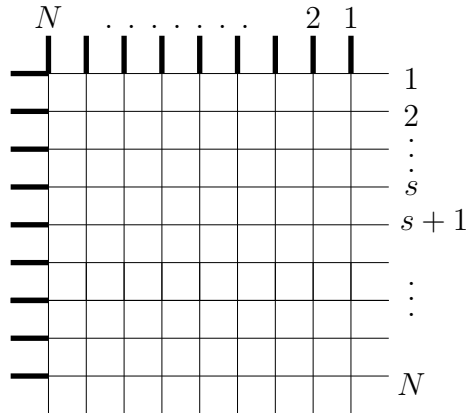


Figura 2.3: Condizioni al contorno a parete di dominio. Scegliamo di numerare linee orizzontali e linee verticali in ordine crescente dall'alto verso il basso e da destra verso sinistra.

l'interno del reticolo, mentre quelle sul bordo destro e sul bordo sinistro puntino verso l'esterno (figura 2.3).

Ad ognuna delle sei possibili configurazioni di vertice, associamo un peso di Boltzmann, assunto reale e positivo,

$$w_j = e^{-\frac{\epsilon_j}{k_B T}}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (2.7)$$

dove ϵ_j è l'energia relativa alla corrispondente configurazione e T è la temperatura. Alle configurazioni non ammesse, si associa peso statistico nullo.

Il modello a sei vertici si dice *omogeneo* se w_j , $j = 1, \dots, 6$, dipendono solo dalla configurazione di vertice a cui sono associati. Se invece dipendono dalla posizione della configurazione di vertice sul reticolo, si parla di modello *non omogeneo*. Definiamo il peso statistico relativo ad un generico stato S (in cui, per definizione, viene rispettata la *ice rule*) come

$$W(S) := \prod_{i=1}^6 w_i^{N_i(S)}, \quad (2.8)$$

dove $N_i(S)$ è il numero di configurazioni di vertice di tipo i nello stato S . La funzione di partizione del modello è

$$Z = \sum_{\{S\}} W(S), \quad (2.9)$$

dove la somma è effettuata su tutti i possibili stati del modello compatibili con le condizioni al contorno scelte.

La *misura di Gibbs* è allora definita come

$$P(S) := \frac{W(S)}{Z}, \quad \forall S \in \{S\}. \quad (2.10)$$

Definiamo la *funzione caratteristica* di uno spigolo e del reticolo come,

$$\chi_e(S) := \begin{cases} 1 & \text{se } e, \text{ nello stato } S, \text{ è occupato da un segmento pieno,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Questo ci permette di definire una *funzione di correlazione locale* come il valore di aspettazione di un prodotto di funzioni caratteristiche rispetto alla misura di probabilità (2.10),

$$\langle \chi_{e_1} \chi_{e_2} \cdots \chi_{e_n} \rangle = \sum_{\{S\}} P(S) \prod_{i=1}^n \chi_{e_i}(S). \quad (2.12)$$

Questa grandezza indica la probabilità che il sistema si trovi in uno stato in cui gli spigoli e_1, \dots, e_n siano occupati da segmenti pieni.

Scelta delle energie

Assumiamo il sistema invariante rispetto all'inversione di tutte le frecce simultaneamente. Se interpretiamo le frecce sul reticolo come momenti di dipolo elettrico locali, questo significa considerare il sistema in assenza di campo elettrico. La configurazione di vertice di tipo 1 è caratterizzata da un momento di dipolo elettrico diretto verso Nord-Est, mentre quella di tipo 2 da uno diretto verso Sud-Ovest. Dunque, identificando ϵ_1 e ϵ_2 , si annulla la componente NE/SO del campo elettrico. Similmente, uguagliando ϵ_3 e ϵ_4 , annulliamo la componente NO/SE del campo. Poniamo quindi

$$\epsilon_1 = \epsilon_2, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4. \quad (2.13)$$

Osserviamo che, con condizioni periodiche al contorno e condizioni al contorno a parete di dominio, la differenza tra il numero di configurazioni di tipo 5 e di tipo 6 è costante su ogni linea orizzontale del reticolo; in particolare, nel primo caso è 0, mentre nel secondo è 1. Pertanto, non si perde di generalità nel porre, in entrambi i casi,

$$\epsilon_5 = \epsilon_6. \quad (2.14)$$

In termini dei pesi di Boltzmann, (2.13) e (2.14) implicano

$$a := w_1 = w_2, \quad b := w_3 = w_4, \quad c := w_5 = w_6. \quad (2.15)$$

Nel seguito assumeremo sempre (2.15).

2.3 Soluzione con condizioni al contorno periodiche

2.3.1 La matrice di trasferimento

Consideriamo il modello a sei vertici su un reticolo con M linee orizzontali e N linee verticali e imponiamo le condizioni al contorno periodiche. Assumiamo che i pesi di Boltzmann soddisfino la condizione (2.15).

Chiamiamo riga r -esima l'insieme di N spigoli verticali tra la r -esima e la $r + 1$ -esima linea orizzontale. Indichiamo con φ_r lo "stato" della riga r -ima, ovvero la configurazione dei segmenti pieni sugli spigoli verticali. Dato che su ogni spigolo può esserci un segmento pieno o un segmento vuoto, φ_r ammette 2^N possibili valori.

Detto m_j , $j = 1, \dots, 6$, il numero di configurazioni di vertice di tipo j sulla $r + 1$ -esima linea orizzontale in un certo stato del modello, definiamo la matrice $2^N \times 2^N$, con elementi

$$V(\varphi_r, \varphi_{r+1}) = \sum \prod_{j=1}^6 w_j^{m_j}, \quad (2.16)$$

matrice di trasferimento, dove la somma è effettuata su tutte le possibili configurazioni di spigoli sulla linea orizzontale $r + 1$ -esima.

La funzione di partizione può essere scritta come

$$Z_{per} = \sum_{\varphi_1} \cdots \sum_{\varphi_M} V(\varphi_1, \varphi_2) V(\varphi_2, \varphi_3) \cdots V(\varphi_M, \varphi_1) = \text{Tr } V^M. \quad (2.17)$$

Osserviamo che i soli elementi non nulli di $V(\varphi_r, \varphi_{r+1})$ sono quelli tali che tutte le configurazioni di vertice sulla linea orizzontale $r + 1$ -esima rispettino la *ice rule*.

Detti Λ_j gli autovalori di V ,

$$\text{Tr } V^M = \sum_{j=1}^{2^N} \Lambda_j^M. \quad (2.18)$$

Pertanto, si ha

$$Z_{per} \sim \Lambda_{max}^M, \quad M \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

dove Λ_{max} è il massimo autovalore di V .

La conoscenza di Λ_{max} ci permette di determinare la densità di energia libera per sito,

$$f := -k_B T \lim_{M, N \rightarrow \infty} \frac{1}{MN} \ln Z_{per} = -k_B T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \Lambda_{max}. \quad (2.20)$$

Si può dimostrare che questo limite esiste ed è diverso da 0 [43].

2.3.2 Fasi del modello

Introduciamo il parametro

$$\Delta := \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad (2.21)$$

detto anisotropia. Nel contesto della corrispondenza tra catena XXZ e modello a sei vertici citata in precedenza, si trova che questo parametro coincide con la quantità Δ in (1.14).

Nel limite termodinamico, è possibile diagonalizzare la matrice di trasferimento e determinare l'autovalore massimo. Al variare dell'anisotropia si trovano tre diverse espressioni per f che individuano altrettante fasi del modello [43].

- **Fase ferroelettrica:** $\Delta > 1$

In questo caso, si ha

$$\Lambda_{max} = a^N + b^N. \quad (2.22)$$

Corrispondentemente, l'energia libera è

$$f_{FE} = \min(\epsilon_1, \epsilon_3). \quad (2.23)$$

Ricordando la definizione di Δ , possiamo individuare due possibilità per ottenere $\Delta > 1$. La prima è $a > b + c$; in questo caso, $\epsilon_1 < \epsilon_3, \epsilon_5$ e, dunque, lo stato di minima energia è quello in cui o tutte le configurazioni di singolo vertice sono di tipo w_1 o sono tutte di tipo w_2 . Quindi, il sistema, a basse temperature, è ordinato ferroelectricamente. L'energia libera è ϵ_1 ed è la stessa per ogni valore di Δ tale che $a > b + c$. Ciò significa che, in questo regime, nel limite termodinamico, gli stati eccitati contribuiscono in modo trascurabile alla funzione di partizione ed il sistema è "congelato" nella configurazione di minima energia. L'altra possibilità è $b > a + c$. La situazione è la stessa, ma, stavolta, dato che $\epsilon_3 < \epsilon_1, \epsilon_5$, gli stati di minima energia sono caratterizzati dalla presenza esclusiva di configurazioni di tipo w_3 o di tipo w_4 : abbiamo nuovamente ordine ferroelettrico a basse temperature. L'energia libera è ϵ_3 in tutto il regime: pertanto, anche in questo caso, il sistema è "congelato" nello stato di energia minima.

- **Fase disordinata:** $-1 < \Delta < 1$

Se scegliamo la parametrizzazione

$$a = \sin(\lambda + \eta), \quad b = \sin(\lambda - \eta), \quad c = \sin 2\eta, \quad (2.24)$$

l'energia libera è

$$f_D = \epsilon_1 - k_B T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh[2(\lambda - \eta)x] \sinh(2\eta x)}{2x \sinh(\pi x) \cosh[(\pi - 2\eta)x]} dx, \quad (2.25)$$

avendo posto $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ e $\eta < \lambda < \pi - \eta$, in modo da avere i pesi statistici positivi. Questo regime include l'eventualità $a = b = c = 1$; pertanto, ci aspettiamo che il sistema si trovi in una fase disordinata. Ciò è vero nel senso che le correlazioni decadono all'aumentare della distanza. Più precisamente, la lunghezza di correlazione è infinita, per ogni valore di Δ , e, dunque, siamo in presenza di funzioni di correlazione che decadono con legge di potenza. In questo senso, l'intera fase $-1 < \Delta < 1$ è critica.

- **Fase antiferroelettrica:** $\Delta < -1$

Per mantenere i pesi statistici reali e positivi e ottenere $\Delta < -1$, cambiamo parametrizzazione, ponendo $\eta = i\gamma + \frac{\pi}{2}$ e $\lambda = iv + \frac{\pi}{2}$ (in modo tale che $-\gamma < v < \gamma$) e dividendo tutto per $-i$. Così facendo, si ha

$$a = \sinh(v + \gamma), \quad b = \sinh(\gamma - v), \quad c = \sinh 2\gamma. \quad (2.26)$$

L'espressione dell'energia libera che si può ricavare è

$$f_{AF} = \epsilon_1 - k_B T \left[(\gamma - v) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-2m\gamma) \sinh(2m(\gamma - v))}{m \cosh 2m\gamma} \right]. \quad (2.27)$$

Dal punto di vista dei pesi statistici, $\Delta < -1$ corrisponde a $c > a + b$ e, quindi, $\epsilon_5 < \epsilon_1, \epsilon_3$. Pertanto, lo stato di minima energia è quello in cui le configurazioni di singolo vertice w_5 e w_6 si alternano sul reticolo, in modo tale che la polarizzazione sia localmente nulla (abbiamo, più precisamente, due stati di minima energia, ottenuti, l'uno dall'altro, cambiando il verso a tutte le frecce sul reticolo). Abbiamo, allora, ordine antiferroelettrico a bassa temperatura. A differenza della fase ferroelettrica, in questo caso, l'espressione dell'energia libera mostra che le fluttuazioni non sono trascurabili e che, pertanto, la fase non è congelata in uno dei due stati di minima energia (se non per $\Delta \rightarrow -\infty$).

Il diagramma di fase del modello è riportato in figura 2.4. Le linee che separano le tre fasi sono dette *linee critiche*. Si noti che si ha esattamente lo stesso diagramma di fase, per gli stessi valori del parametro Δ , anche per la catena XXZ in campo nullo, descritta dalla hamiltoniana (1.14).

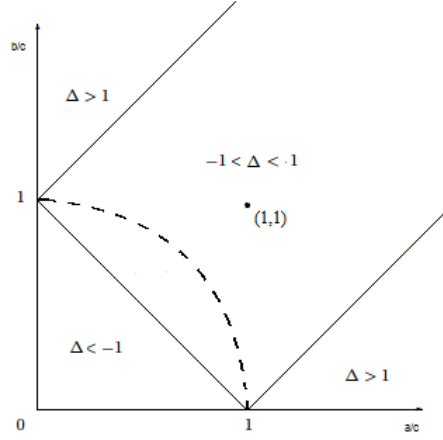


Figura 2.4: Diagramma di fase del modello sul piano $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. L'arco di circonferenza tratteggiato corrisponde al valore $\Delta = 0$ (fermioni liberi). Per $T \rightarrow \infty$, il sistema si trova nel punto $(1, 1)$ del diagramma.

2.3.3 Linee critiche

Per un dato valore di temperatura, i pesi statistici a , b e c corrispondono ad un punto sul diagramma in figura 2.4. In particolare, se $T \rightarrow \infty$, dall'espressione (2.7), $a = b = c = 1$ e il sistema si trova nel punto $(1, 1)$ del diagramma. Partendo da uno stato generico, se aumentiamo la temperatura, il punto che rappresenta il sistema percorrerà un cammino nel diagramma, fino a raggiungere il punto $(1, 1)$. Se partiamo da una delle fasi ordinate, il sistema passerà certamente in quella disordinata: chiamiamo T_c la temperatura a cui avviene questo passaggio. Dato che, nelle varie fasi, si ha una diversa espressione dell'energia libera, la funzione f deve avere una singolarità per $T = T_c$.

- **Transizione di fase ferroelettrica:** avviene se $\epsilon_1 < \epsilon_3, \epsilon_5$. In tal caso, a basse temperature, il sistema si trova nella regione $\Delta > 1$ del diagramma di fase. La temperatura critica è definita come quella in corrispondenza della quale vale

$$a = b + c. \quad (2.28)$$

Se $T > T_c$, l'energia libera sarà della forma (2.25), mentre, se $T < T_c$, $f = \epsilon_1$. Nel limite in cui $T \rightarrow T_c^+$, possiamo definire una temperatura ridotta,

$$t = \frac{b + c - a}{a}. \quad (2.29)$$

Così facendo, si ottiene [43]

$$f = \begin{cases} \epsilon_1, & T \rightarrow T_c^- \\ \epsilon_1 - \frac{1}{2}k_B T_c t + \mathcal{O}(t^{\frac{3}{2}}), & T \rightarrow T_c^+. \end{cases} \quad (2.30)$$

Si ha dunque un'energia libera continua, ma una discontinuità di salto nella sua derivata prima. Inoltre, il calore specifico (legato alla derivata seconda di f) presenta una divergenza, alla temperatura critica, con andamento $t^{-\frac{1}{2}}$, per $t \rightarrow 0^+$. Siamo in presenza di una transizione di fase del primo ordine.

Se le energie sono tali che $\epsilon_3 < \epsilon_1, \epsilon_5$, abbiamo lo stesso tipo di transizione di fase. L'unica differenza tra i due casi è lo scambio $a \leftrightarrow b$.

- **Transizione di fase antiferroelettrica:** si ha se il sistema si trova, per temperature sufficientemente basse, nella regione del diagramma $\Delta < -1$. Siccome in questa fase $\epsilon_5 < \epsilon_1, \epsilon_3$, la temperatura critica sarà quella per cui

$$c = a + b. \quad (2.31)$$

Se $T < T_c$, l'energia libera è data da (2.27), mentre, se $T > T_c$, si ha ancora (2.25). Definendo la temperatura ridotta come

$$t = \frac{a + b - c}{c}, \quad (2.32)$$

si trova che

$$f_D(-t) - f_{AF}(t) \propto \exp\left(-\frac{\text{cost}}{\sqrt{-t}}\right), \quad t \rightarrow 0^-. \quad (2.33)$$

Questa singolarità è molto debole: per $t \rightarrow 0$, l'energia libera tende a zero con tutte le sue derivate. Si parla in questo caso di transizione di fase "di ordine infinito" (ovvero, di tipo Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [44, 45]).

2.4 Influenza delle condizioni al contorno

Una peculiarità del modello a sei vertici è la sua dipendenza dalle condizioni al contorno, anche nel limite termodinamico. Infatti, esattamente come per la tassellatura con i domino del diamante azteco, il vincolo sulle configurazioni ammesse induce correlazioni a lungo raggio.

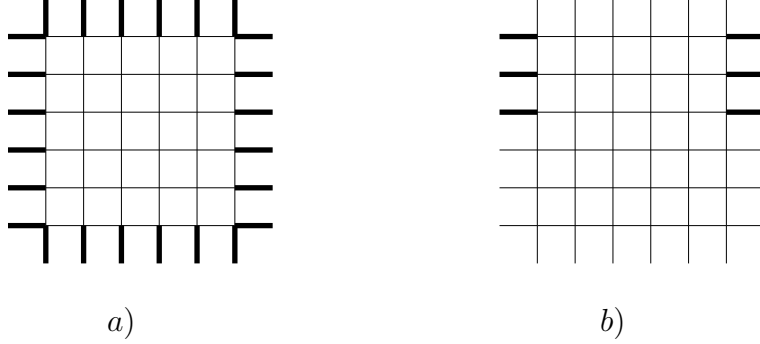


Figura 2.5: Alcune condizioni al contorno che restringono lo spazio delle configurazioni ad un singolo stato. Per i reticoli 6×6 rappresentati, le funzioni di partizione sono $Z_a = w_2^{36}$ e $Z_b = w_1^{18} w_4^{18}$.

In figura 2.5, vediamo alcuni esempi elementari di condizioni al contorno che permettono al sistema un solo stato. Considerando due reticoli $N \times N$ con tali condizioni al contorno, si trova rispettivamente

$$Z_a = w_2^{N^2}, \quad Z_b = w_1^{\frac{N^2}{2}} w_4^{\frac{N^2}{2}}, \quad (2.34)$$

da cui, corrispondentemente,

$$f_a = \epsilon_2, \quad f_b = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_4}{2}, \quad (2.35)$$

evidentemente differenti rispetto al caso di condizioni al contorno periodiche.

2.5 Separazione spaziale delle fasi

Il modello a sei vertici, con particolari condizioni al contorno, può presentare *separazione spaziale delle fasi*; un primo e banale esempio può essere osservato per il modello con le condizioni al contorno in figura 2.5 b).

Limitiamoci, per semplicità, al caso in cui $-1 < \Delta < 1$. Dal punto di vista qualitativo, questo fenomeno è dovuto alle condizioni al contorno imposte, che possono indurre, attraverso la *ice rule*, regioni macroscopiche ordinate vicino ai bordi. Tale ordine entra in competizione con la tendenza del sistema a disporsi in fase disordinata e si giunge così ad una separazione delle fasi sul reticolo: nelle regioni vicine al bordo, il sistema è ordinato, mentre, nelle regioni interne, il sistema è disordinato e critico.

La separazione delle fasi emerge nel limite di *scaling*: questo limite è ottenuto facendo tendere all'infinito il numero di siti in ogni direzione e a zero il passo reticolare, mantenendo fissate le dimensioni del reticolo. In questo limite le fasi sono nettamente separate. L'interfaccia tra le fasi è una curva, detta "curva artica".

In presenza di condizioni al contorno a parete di dominio, si ha separazione spaziale delle fasi. Un indizio di questo fatto è dato dal cambiamento dell'espressione della densità di energia libera per sito, rispetto al caso periodico (2.25); infatti, si trova, scegliendo la parametrizzazione (2.24) per i pesi statistici [16, 14],

$$e^{-f(\lambda,\eta)} = \sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta) \frac{\alpha}{\sin[\alpha(\lambda - \eta)]}, \quad (2.36)$$

dove $\alpha = \frac{\pi}{\pi - 2\eta}$.

La separazione spaziale delle fasi, osservata numericamente in [49]-[53], è stata studiata analiticamente in [18]-[15]. In particolare, in [18], è stata calcolata esplicitamente l'espressione della curva artica che separa le due fasi, per ogni valore di Δ nel regime $|\Delta| < 1$.

2.6 Modello a 6 vertici e tassellatura con i domino

Il modello a 6 vertici può essere visto come una tassellatura con domino interagenti. Ogni tassellatura, infatti, può essere realizzata in termini di mattonelle decorate come indicato nella riga superiore della figura 2.6. Se associamo alle mattonelle le configurazioni di vertice, come illustrato in figura, ad ogni tassellatura con i domino viene fatto corrispondere uno stato del modello a sei vertici. Si trova che il diamante azteco di ordine N corrisponde al modello a sei vertici su reticolo $N \times N$ con condizioni al contorno a parete di dominio (figura 2.6).

Mostriamo che il modello a sei vertici con DWBC e $\Delta = 0$ è equivalente alla tassellatura con i domino del diamante azteco con distribuzione uniforme. Alla configurazione di vertice di tipo 6, sono associate due caselle, mentre, a tutte le altre configurazioni, una sola. Pertanto, se vogliamo studiare la tassellatura aleatoria con distribuzione uniforme, il peso statistico w_6 dovrà avere valore doppio rispetto agli altri:

$$\omega_1 = \dots = \omega_5 = 1, \quad \omega_6 = 2. \quad (2.37)$$

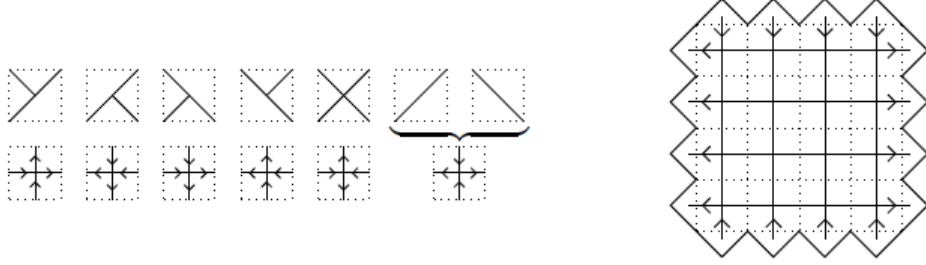


Figura 2.6: La corrispondenza tra le mattonelle decorate e le configurazioni di vertice del modello a 6 vertici.

La funzione di partizione è

$$Z_{TD} = \sum_{\mathcal{S}} \prod_{j=1}^6 \omega_j^{N_j(\mathcal{S})} = \sum_{\mathcal{S}} 2^{N_6(\mathcal{S})}, \quad (2.38)$$

dove $N_i^{(\mathcal{S})}$ è il numero di configurazioni di vertice di tipo i nello stato \mathcal{S} . Sfruttando i vincoli su N_i riportati nella sezione 2.2 e ponendo

$$c = \sqrt{\omega_5 \omega_6}, \quad (2.39)$$

si ottiene

$$Z_{TD} = 2^{\frac{N}{2}} Z_{6VM}(a = 1, b = 1, c = \sqrt{2}). \quad (2.40)$$

Z_{6VM} è la funzione di partizione di un modello a sei vertici con DWBC caratterizzato dai pesi statistici indicati in parentesi. Il valore dell'anisotropia associato a questa scelta di pesi statistici è $\Delta = 0$. Quindi la tassellatura con i domino del diamante azteco con distribuzione uniforme è equivalente ad un modello a sei vertici con DWBC nel regime di fermioni liberi.

Ricordiamo che, relativamente alla parametrizzazione (2.24), valutando i pesi statistici per $\lambda = \frac{\pi}{2}$ e $\eta = \frac{\pi}{4}$ (corrispondente a $\Delta = 0$), si ottiene

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = 1. \quad (2.41)$$

Si trova così

$$Z_{TD} = 2^{\frac{N+N^2}{2}} Z_{6VM}(\lambda = \frac{\pi}{2}, \Delta = 0). \quad (2.42)$$

Poiché si dimostra (si veda [63]) che $Z_{6VM}(\lambda = \frac{\pi}{2}, \Delta = 0) = 1$, si ha

$$Z_{TD} = 2^{\frac{N+N^2}{2}}, \quad (2.43)$$

che riproduce la (1.2), come atteso, dato che, per costruzione, Z_{TD} è il numero di possibili tassellature.

Considerare il modello a sei vertici per $\Delta \neq 0$ equivale ad introdurre un peso statistico non banale per le mattonelle a cui sono associate le configurazioni di vertici di tipo 5 e 6, favorendo o sfavorendo l'allineamento dei domino.

Capitolo 3

Integrabilità quantistica

3.1 Definizione di integrabilità quantistica

Una nozione fondamentale in meccanica classica è quella di integrabilità.

Definizione (*Sistema integrabile classico*). Un sistema classico, con spazio della fasi $2n$ -dimensionale \mathcal{M} , è detto integrabile se esistono n quantità F_i , $i = 1, \dots, n$, definite sullo spazio delle fasi, conservate, indipendenti ed in involuzione:

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

dove $\{\cdot, \cdot\}$ indica la parentesi di Poisson. Con quantità indipendenti si intende quantità tali che l'insieme $\{(\vec{p}, \vec{q}) \in \mathcal{M} | F_i(\vec{p}, \vec{q}) = c_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ individui una sottovarietà dello spazio delle fasi.

Se queste condizioni sono verificate, un noto teorema (dovuto a Liouville) stabilisce l'integrabilità per quadrature delle equazioni di moto del sistema. L'integrabilità, in questo caso, ha un significato ben preciso: le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione temporale delle coordinate possono essere risolte tramite l'introduzione delle variabili angolo-azione e l'evoluzione nello spazio delle fasi avviene su sottovarietà toroidali [54].

L'estensione di questa definizione ad un sistema quantistico pone dei problemi. Per esempio, potremmo dire che un sistema quantistico è integrabile se lo è il suo analogo classico. Questa definizione, tuttavia, non vale per quei modelli che non presentano analogo classico: ne sono un esempio rilevante le catene di spin.

Un'altra possibilità potrebbe essere di sostituire nella definizione classica le grandezze definite sullo spazio delle fasi con osservabili operatoriali e le parentesi di Poisson con i commutatori. Tuttavia, stabilire il significato di indipendenza tra operatori mutuamente commutanti non è banale. A tale proposito, esaminiamo due possibilità.

1. *Indipendenza lineare*: dato uno spazio di Hilbert d dimensionale, esistono al più d operatori linearmente indipendenti hermitiani definiti su tale spazio (a meno di trasformazioni unitarie che preservino gli autovalori). Allora, data la hamiltoniana H di un sistema, definita sul suddetto spazio di Hilbert, posso considerare il set di operatori composto dalle prime d potenze di H , che contiene operatori linearmente indipendenti e mutuamente commutanti. Pertanto, questa scelta porta, come spiacevole conclusione, l'integrabilità di ogni sistema quantistico.
2. *Indipendenza algebrica*: consideriamo un sistema quantistico con hamiltoniana H ed un operatore L tale che $[H, L] = 0$. Se la hamiltoniana presenta uno spettro non degenere, si può mostrare che esiste una relazione algebrica che la collega a L [55]. Poiché operatori commutanti non possono essere algebricamente indipendenti, non potremmo considerare integrabile nessun sistema quantistico.

La difficoltà nel definire l'integrabilità quantistica è legata anche al concetto di risolubilità esatta: nel caso classico, le quadrature riducono equazioni differenziali ad equazioni algebriche. In meccanica quantistica, risolvere un modello significa trovare lo spettro e gli autovettori della hamiltoniana, che, già di per sé, è un problema algebrico.

Al fine di fornire una definizione di integrabilità quantistica, considereremo modelli con potenziale non nullo soltanto in caso di "contatto" tra le "particelle". Questi modelli sono risolubili esattamente tramite il *Bethe ansatz* delle coordinate (si veda il seguito del capitolo).

Un'altra possibilità è quella di considerare le soluzioni dell'equazione di Yang-Baxter, dalle quali, grazie alla loro particolare struttura algebrica, è possibile costruire modelli quantistici esattamente risolubili, che forniscono una definizione costruttiva di integrabilità quantistica (si veda il capitolo 4).

3.2 Modello di Lieb-Liniger e *Bethe ansatz* delle coordinate

3.2.1 Funzione d'onda di Bethe

In questa sezione, consideriamo il cosiddetto modello di Lieb-Liniger, che descrive bosoni con interazione di contatto, in uno spazio unidimensionale. Il *Bethe ansatz* delle coordinate, tecnica utilizzata per la soluzione esatta del modello, è alla base della trattazione dei sistemi quantistici integrabili [57].

La hamiltoniana del modello di Lieb-Liniger per N particelle è, in opportune unità,

$$H_{LL} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2c \sum_{1 \leq j < l \leq N} \delta(x_j - x_l), \quad (3.2)$$

dove c , positivo per semplicità, è la costante d'accoppiamento [58].

Partiamo dal considerare il modello per $N = 2$,

$$H_{LL}^{(2)} = - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2c\delta(x_1 - x_2). \quad (3.3)$$

Scriviamo il generico autostato, dividendo le configurazioni con $x_1 > x_2$ da quelle con $x_2 > x_1$,

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)\Theta(x_2 - x_1) + \psi(x_2, x_1)\Theta(x_1 - x_2), \quad (3.4)$$

dove $\Theta(x)$ è la funzione a scalino. La funzione (3.4) è completamente simmetrica rispetto allo scambio delle coordinate, come richiesto per un sistema di bosoni. Assumendo $\psi(x_1, x_2)$ una sovrapposizione di onde piane associate a due particelle di impulso k_1 e k_2 ,

$$\psi(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + A_{21}e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}, \quad (3.5)$$

e ricordando che $\frac{\partial}{\partial x}\Theta(x) = \delta(x)$, si ha

$$H_{LL}^{(2)}\Psi(x_1, x_2) = (k_1^2 + k_2^2)\Psi(x_1, x_2) + 2\delta(x_1 - x_2) \times \\ \times [c(A_{12} + A_{21}) + i(A_{12} - A_{21})(k_1 - k_2)] e^{i(k_1+k_2)x_1}. \quad (3.6)$$

L'equazione agli autovalori,

$$H_{LL}^{(2)}\psi(x_1, x_2) = E^{(2)}\psi(x_1, x_2), \quad (3.7)$$

è soddisfatta se

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{(k_1 - k_2) + ic}{(k_1 - k_2) - ic}. \quad (3.8)$$

In tal caso, si ottiene, per lo stato descritto da $\Psi(x_1, x_2)$, un'energia pari a

$$E^{(2)} = k_1^2 + k_2^2. \quad (3.9)$$

Il membro di destra di (3.8) ha modulo pari a 1 e può essere riscritto come

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = -e^{i\theta(k_1-k_2)}, \quad (3.10)$$

con

$$\theta(k) := -i \ln \left(\frac{k + ic}{k - ic} \right) - i\pi. \quad (3.11)$$

Questa quantità viene detta *fase di scattering* e giocherà un ruolo fondamentale in tutta la trattazione successiva.

Consideriamo adesso il caso di N particelle: la hamiltoniana è (3.2). Assumiamo che le coordinate abbiano l'ordinamento fissato $x_1 < \dots < x_N$ e, in modo analogo a (3.5), scriviamo l'autofunzione come

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{P \in S_N} A_P e^{i \sum_{j=1}^N k_{P(j)} x_j}, \quad (3.12)$$

dove P è una permutazione di N elementi. La funzione d'onda (3.12) è detta *funzione d'onda di Bethe* e dipende da un set di impulsi k_1, \dots, k_N i cui possibili valori sono determinati dalle condizioni al contorno.

Osserviamo che tutte le permutazioni P possono essere generate scambiando due indici alla volta. Pertanto, possiamo individuare i coefficienti della combinazione (3.12) esattamente come visto nel caso a due particelle: prese due permutazioni, P e P' , che differiscono per il solo scambio di due elementi, k e k' , si ha

$$\frac{A_P}{A_{P'}} = -e^{i\theta(k-k')}. \quad (3.13)$$

Ciò è equivalente a porre, $\forall P \in S_N$,

$$A_P = \Omega_N (-1)^{[P]} \prod_{1 \leq j < l \leq N} (k_{P(j)} - k_{P(l)} + ic), \quad (3.14)$$

dove $[P]$ è la parità della permutazione P e Ω_N è un'opportuna normalizzazione. Gli autovalori dell'energia possono essere ricavati da (3.12),

$$E^{(N)} = \sum_{j=1}^N k_j^2. \quad (3.15)$$

Gli autostati ottenuti possono essere visti come stati ad N particelle, ciascuna caratterizzata da un impulso k_j e un'energia k_j^2 . Si osservi inoltre che, in virtù di (3.14), (3.12) si annulla se due impulsi coincidono: questo realizza un principio di esclusione per i bosoni con interazione di contatto in una dimensione spaziale.

3.2.2 *Bethe ansatz* e matrice S

Consideriamo due particelle su una retta, in uno stato descritto dalla funzione d'onda (3.4). Immaginiamo le due particelle come pacchetti d'onda

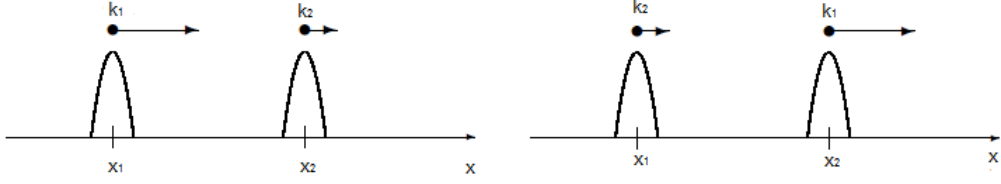


Figura 3.1: A sinistra, la configurazione dei pacchetti d'onda prima dell'interazione, mentre, a destra, quella dopo l'interazione.

localizzati in x_1 e x_2 , caratterizzati da una distribuzione di impulsi con massimo, rispettivamente, in k_1 e k_2 . Scegliamo le coordinate e gli impulsi in modo tale che $x_1 < x_2$ e $k_1 > k_2$. Supponiamo che, per $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$, i due pacchetti d'onda siano non interagenti e che, in un istante di tempo intermedio, siano stati coinvolti in un processo di *scattering* (figura 3.1). La matrice S è definita come

$$S = \frac{\text{ampiezza dell'onda uscente}}{\text{ampiezza dell'onda entrante}} \quad (3.16)$$

e dipende dagli impulsi delle particelle interagenti. Sfruttando (3.5), si ha

$$S(k_1, k_2) = \frac{(k_1 - k_2) - ic}{(k_1 - k_2) + ic} = -e^{-i\theta(k_1 - k_2)}. \quad (3.17)$$

Quindi la funzione $\theta(k)$ è effettivamente una fase di *scattering*.

Consideriamo adesso il sistema con N particelle e funzione d'onda data da (3.12) e (3.14). Scegliamo un ordinamento delle coordinate, ad esempio, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, e un ordinamento dei impulsi, $k_1 > k_2, \dots, > k_N$. Supponiamo nuovamente che, per $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$ le particelle siano non interagenti, ma, che, in un istante di tempo intermedio, sia avvenuto un processo di *scattering*. Se il risultato finale di questo processo è lo scambio $\{k_1, k_2, \dots, k_N\} \rightarrow \{k_N, k_{N-1}, \dots, k_1\}$, dalla definizione (3.16), si ha

$$S(k_1, k_2, \dots, k_N) = \prod_{1 \leq j < l \leq N} S(k_j, k_l). \quad (3.18)$$

La fattorizzazione della matrice S è una proprietà di tutti i modelli esattamente risolubili tramite il *Bethe ansatz* delle coordinate.

3.2.3 Equazioni di Bethe

Consideriamo il modello su un intervallo di lunghezza L e imponiamo le condizioni al contorno periodiche, ovvero,

$$\psi(x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N) = \psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Fissato un certo ordinamento delle coordinate, consideriamo la prima particella e spostiamola in modo che diventi l'ultima: ciò può essere realizzato scambiandola con ciascuna delle $N-1$ particelle successive. La funzione d'onda acquisite una fase pari alla somma di tutte le fasi di *scattering* relative alle interazioni intermedie a due corpi e una fase aggiuntiva data dall'impulso della particella per L . Per questo motivo imporre condizioni al contorno periodiche significa scrivere

$$1 = e^{ik_j L} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \left(-e^{-i\theta(k_j - k_l)} \right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

Sfruttando (3.17), si giunge a

$$e^{ik_j L} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \left(\frac{k_j - k_l + ic}{k_j - k_l - ic} \right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.21)$$

Considerandone il logaritmo, si hanno le *equazioni di Bethe*,

$$k_j L = 2\pi I_j + \sum_{l=1}^N \theta(k_j - k_l), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.22)$$

dove $\{I_j\}_{j=1}^N$ è un set di numeri interi (se N è dispari) o semiinteri (se N è pari), detti *numeri di Bethe*, che individuano lo stato del sistema. Si può dimostrare che, fissati i numeri di Bethe $\{I_j\}_{j=1}^N$, esiste un unico set di soluzioni $\{k_j\}_{j=1}^N$ delle (3.22) e, dunque, i numeri di Bethe individuano in modo univoco un autostato del sistema. Inoltre, si trova che, se $I_j = I_l$, allora $k_j = k_l$, ovvero solo i set di numeri di Bethe distinti corrispondono a soluzioni fisiche [59].

3.3 Catena di Heisenberg XXZ e Bethe *ansatz*

Consideriamo la catena XXZ di spin $\frac{1}{2}$ con N siti in campo nullo, definita dalla hamiltoniana

$$H_{XXZ} = - \sum_{n=1}^N \left[S_n^{(x)} S_{n+1}^{(x)} + S_n^{(y)} S_{n+1}^{(y)} + \Delta S_n^{(z)} S_{n+1}^{(z)} \right], \quad (3.23)$$

dove Δ è l'anisotropia. Imponiamo condizioni al contorno periodiche, ovvero $S_n^{(\alpha)} = S_{N+n}^{(\alpha)}$, $n = 1, \dots, N$, $\alpha = x, y, z$. Per futura convenienza, esprimiamo l'anisotropia in termini di un ulteriore parametro η , $\Delta = \cos 2\eta$.

Per costruire la funzione d'onda di Bethe, osserviamo che, definendo la componente z della magnetizzazione come

$$S^{(z)} := \sum_{n=1}^N S_n^{(z)}, \quad (3.24)$$

questa risulta conservata, in quanto $[H_{XXZ}, S^{(z)}] = 0$. Pertanto, possiamo cercare gli autostati della hamiltoniana a fissata magnetizzazione lungo l'asse z .

Consideriamo $|0\rangle := \bigotimes_{m=1}^N |\uparrow\rangle_m$, dove $\sigma_m^{(z)} |\uparrow\rangle_m = |\uparrow\rangle_m$, autostato di H_{XXZ} e $S^{(z)}$ con autovalori

$$S^{(z)}|0\rangle = \frac{N}{2}|0\rangle \quad H_{XXZ}|0\rangle = -\Delta N|0\rangle. \quad (3.25)$$

Considerando gli operatori di abbassamento e innalzamento di spin introdotti nella sezione 1.3, lo stato $|0\rangle$ è tale che $\sigma_n^{(+)}|0\rangle = 0$, $n = 1, \dots, N$. Agendo con $\sigma_n^{(-)}$, invece, possiamo ottenere tutti gli autostati di S^z : l'autostato caratterizzato dalla presenza di R spin invertiti (nelle posizioni m_1, \dots, m_R) rispetto allo stato $|0\rangle$, può essere scritto come

$$|m_1, \dots, m_R\rangle := \prod_{j=1}^R \sigma_{m_j}^{(-)}|0\rangle. \quad (3.26)$$

Un generico stato del sistema con magnetizzazione fissata potrà essere espresso come combinazione lineare degli stati (3.26),

$$|\Psi_R\rangle = \sum_{\{m_j\}} f(m_1, m_2, \dots, m_R) |m_1, m_2, \dots, m_R\rangle, \quad (3.27)$$

dove stiamo supponendo $m_1 < m_2 < \dots < m_R$. Vogliamo vedere che struttura assume la funzione $f(m_1, m_2, \dots, m_R)$, se richiediamo che il vettore definito in (3.27) sia autostato di H_{XXZ} . Scriviamo il *Bethe ansatz* per questa ampiezza nella forma

$$\begin{aligned} f(m_1, m_2, \dots, m_R) &:= \sum_{P \in S_R} A(P) e^{i \sum_{j=1}^N m_j k_{Pj}} = \\ &= \sum_{P \in S_R} (-1)^{|P|} e^{i \sum_{j=1}^N m_j k_{Pj} - \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j < l \leq R} \theta(k_{Pl}, k_{Pj})}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove $[P]$ è la parità della permutazione P e $\theta(k, k')$ è la fase di *scattering* di questo modello (a priori diversa da (3.11)). Così facendo, abbiamo introdotto la dipendenza da un set di impulsi che possiamo associare a R eccitazioni lungo la catena. Imponendo

$$H_{X X Z}|\Psi_R\rangle = E_{\Psi_R}|\Psi_R\rangle \quad (3.29)$$

e introducendo la parametrizzazione in termini delle rapidità $\{\lambda_j\}_{j=1}^R$,

$$k_j = -i \ln \left(\frac{\cos(\lambda_j - \eta)}{\cos(\lambda_j + \eta)} \right), \quad j = 1, \dots, R \quad (3.30)$$

l'ampiezza $f(m_1, m_2, \dots, m_R)$ ha ancora un'espressione analoga a (3.28), con gli impulsi dati da (3.30) e la fase di *scattering* che può essere esplicitamente scritta come

$$\theta(\lambda_i - \lambda_j) = -i \ln \left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_i + 2\eta)} \right). \quad (3.31)$$

L'autovalore della hamiltoniana associata a questa soluzione è

$$E_{\Psi_R} = - \sum_{j=1}^R \epsilon(\lambda_j) - N\Delta, \quad (3.32)$$

dove la relazione di dispersione è data da

$$\epsilon(\lambda) = \frac{\sin^2 2\eta}{2 \cos(\lambda + \eta) \cos(\lambda - \eta)}. \quad (3.33)$$

Come visto nella sezione precedente, imporre le condizioni al contorno periodiche significa

$$e^{ik_j(\lambda_j)N} = (-1)^{N-1} \exp \left\{ i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^R \theta(\lambda_j - \lambda_k) \right\}, \quad j = 1, \dots, R. \quad (3.34)$$

Prendendone il logaritmo, si ottengono le equazioni di Bethe,

$$k_j(\lambda_j)N = 2\pi I_j + \sum_{l=1}^R \theta(\lambda_j - \lambda_l), \quad j = 1, \dots, R, \quad (3.35)$$

dove I_j sono i numeri di Bethe (interi, se N è dispari, e semiinteri, se N è pari) che identificano lo stato del sistema. Sostituendo (3.30) e (3.31) in (3.34), si ha un'altra forma delle equazioni di Bethe,

$$\left(\frac{\cos(\lambda_j - \eta)}{\cos(\lambda_j + \eta)} \right)^N = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^R \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_j + 2\eta)}{\sin(\lambda_k - \lambda_j - 2\eta)}, \quad j = 1, \dots, R. \quad (3.36)$$

Grazie al *Bethe ansatz* delle coordinate abbiamo risolto esattamente i modelli considerati, trovando gli autovettori e gli autovalori della hamiltoniana. Nel prossimo capitolo descriveremo il metodo dello *scattering* inverso quantistico, che ci permetterà di fornire una definizione alternativa, più estesa e costruttiva, di integrabilità quantistica.

Capitolo 4

Metodo dello *scattering* inverso quantistico e *Bethe ansatz* algebrico

4.1 Nozioni di base

Introduciamo due spazi di Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{V} detti, rispettivamente, spazio quantistico e spazio ausiliare. Definiamo un set di M operatori

$$L(m; \lambda) : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}, \quad m = 1, \dots, M, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

che chiamiamo *operatori di Lax*.

Un operatore definito su $\mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$ avrà indici relativi ai due spazi: rappresentiamo con lettere latine quelli relativi a \mathcal{V} e con lettere greche quelli relativi a \mathcal{H} .

Definizione (*Matrice di monodromia*). Dato un set di M operatori di Lax definiti su $\mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$, definiamo *matrice di monodromia* l'operatore

$$T(\lambda) : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \quad (4.2)$$

tale che

$$T(\lambda) := L(M; \lambda)L(M-1; \lambda) \dots L(1; \lambda), \quad (4.3)$$

dove il prodotto è svolto nello spazio \mathcal{V} .

Definizione (*Matrice di trasferimento*). Si definisce *matrice di trasferimento* l'operatore $\tau(\lambda) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tale che

$$\tau(\lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{V}} T(\lambda), \quad (4.4)$$

dove la traccia è eseguita nello spazio \mathcal{V} .

Teorema. *Se*

1. $\forall p, q, r, s = 1, \dots, \dim \mathcal{V}$,

$$[L_{pq}(j; \lambda), L_{rs}(k; \mu)] = 0, \quad \forall j \neq k, \quad j, k = 1 \dots M, \quad (4.5)$$

2. *esiste un operatore $\tilde{R} : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ tale che*

$$\tilde{R}(\lambda, \mu) (L(l; \lambda) \otimes L(l; \mu)) = (L(l; \mu) \otimes L(l; \lambda)) \tilde{R}(\lambda, \mu), \quad \forall l = 1, \dots, M, \quad (4.6)$$

allora

$$\tilde{R}(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) \tilde{R}(\lambda, \mu), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \quad (4.7)$$

Dimostrazione. Consideriamo il membro sinistro di (4.7) (che indichiamo con \mathcal{L}) ed usiamo la definizione (4.3),

$$\mathcal{L} = \tilde{R}(\lambda, \mu) (L(M; \lambda) \dots L(l; \lambda) \dots L(1; \lambda)) \otimes (L(M; \mu) \dots L(l; \mu) \dots L(1; \mu)). \quad (4.8)$$

Dati quattro operatori A, B, C e D , di cui B e C commutanti, vale

$$(A \otimes B) (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (4.9)$$

Da ciò, posso riscrivere (4.8) come

$$\mathcal{L} = \tilde{R}(\lambda, \mu) (L(M; \lambda) \otimes L(M; \mu)) \dots (L(l; \lambda) \otimes L(l; \mu)) \dots (L(1; \lambda) \otimes L(1; \mu)). \quad (4.10)$$

Usando (4.5) e (4.6), spostiamo \tilde{R} attraverso la stringa di operatori L , ottenendo

$$\mathcal{L} = (L(M; \mu) \otimes L(M; \lambda)) \dots (L(l; \mu) \otimes L(l; \lambda)) \dots (L(1; \mu) \otimes L(1; \lambda)) \tilde{R}(\lambda, \mu). \quad (4.11)$$

Da questa possiamo concludere la dimostrazione, sfruttando nuovamente (4.9) e la definizione 4.3. \square

L'ipotesi (4.5) è anche detta ultralocalità; in virtù di questa, possiamo definire, per ogni $j = 1, \dots, M$, un sottospazio quantistico locale $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = \bigotimes_{j=1}^M \mathcal{H}_j$, tale che $L(j; \lambda)$ agisca in modo non banale solo in \mathcal{H}_j .

Per futura convenienza, riportiamo (4.7) in componenti:

$$\left(\tilde{R}(\lambda, \mu) \right)_{k_1, k_2}^{i_1, i_2} \left(T_{i_2, i_3}^{\alpha_1, \alpha_2}(\lambda) T_{k_2, k_3}^{\alpha_2, \alpha_3}(\mu) \right) = \left(T_{i_1, i_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(\mu) T_{k_1, k_2}^{\alpha_2, \alpha_3}(\lambda) \right) \left(\tilde{R}(\lambda, \mu) \right)_{k_2, k_3}^{i_2, i_3}. \quad (4.12)$$

Si noti che è usata la convenzione di Einstein secondo cui si sottintende la somma sugli indici ripetuti.

Introduciamo l'operatore di permutazione

$$\Pi : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}, \quad (4.13)$$

le cui componenti sono definite da

$$(\Pi)_{i_1, i_2}^{j_1, j_2} = \delta_{i_1, j_2} \delta_{i_2, j_1}, \quad (4.14)$$

e definiamo la matrice R come

$$R(\lambda, \mu) := \Pi \tilde{R}(\lambda, \mu). \quad (4.15)$$

Poiché $\Pi^2 = I_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}}$, l'equazione (4.12) diventa

$$(R(\lambda, \mu))_{k_1, k_2}^{i_1, i_2} \left(T_{i_2, i_3}^{\alpha_1, \alpha_2}(\lambda) T_{k_2, k_3}^{\alpha_2, \alpha_3}(\mu) \right) = \left(T_{k_1, k_2}^{\alpha_1, \alpha_2}(\mu) T_{i_1, i_2}^{\alpha_2, \alpha_3}(\lambda) \right) (R(\lambda, \mu))_{k_2, k_3}^{i_2, i_3}. \quad (4.16)$$

Teorema. *Per ogni coppia di parametri spettrali $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, se l'equazione (4.7) è soddisfatta, si ha*

$$\tau(\lambda)\tau(\mu) = \tau(\mu)\tau(\lambda) \quad (4.17)$$

Dimostrazione. Possiamo riscrivere (4.7) come

$$\tilde{R}(\lambda, \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) \left(\tilde{R}(\lambda, \mu) \right)^{-1} = (T(\mu) \otimes T(\lambda)). \quad (4.18)$$

Prendendo, da ambo i lati, la traccia in $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ e ricordando che, dati $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ e $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, vale

$$\text{Tr}_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}}(A \otimes B) = (\text{Tr}_{\mathcal{V}} A) (\text{Tr}_{\mathcal{V}} B), \quad (4.19)$$

si arriva a

$$(\text{Tr}_{\mathcal{V}} T(\lambda)) (\text{Tr}_{\mathcal{V}} T(\mu)) = (\text{Tr}_{\mathcal{V}} T(\mu)) (\text{Tr}_{\mathcal{V}} T(\lambda)), \quad (4.20)$$

che è la tesi. \square

Introduciamo un'utile notazione: dato uno spazio prodotto tensoriale di n spazi vettoriali identici, $\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}$, e un operatore A , definito su questo spazio, tale che $A = a \otimes I \otimes \cdots \otimes I$, indichiamo l'operatore in questione come $\overset{(1)}{A}$. Nel caso in cui A operasse in modo non banale solo sul j -imo e sul k -imo

spazio di $\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}$, lo indicheremo con $A^{(jk)}$. Ad esempio, l'equazione (4.16), con le nuove notazioni, è

$$R^{(12)(1)(2)} T T = T T R^{(2)(1)(12)}, \quad (4.21)$$

in cui si omettono i parametri spettrali dato che, nelle equazioni in cui compare R invece di \tilde{R} , c'è una corrispondenza biunivoca tra il parametro spettrale e il sottospazio vettoriale su cui l'operatore agisce in modo non banale.

Vogliamo adesso introdurre la cosiddetta *equazione di Yang-Baxter*. Osserviamo che, utilizzando la (4.21), la quantità $T T T^{(1)(2)(3)}$ può essere scritta in due modi diversi. Commutando le matrici di monodromia nell'ordine $(1 \leftrightarrow 2)$, $(1 \leftrightarrow 3)$ e $(2 \leftrightarrow 3)$, otteniamo

$$T T T^{(1)(2)(3)} = \left(R^{(12)} \right)^{-1} \left(R^{(13)} \right)^{-1} \left(R^{(23)} \right)^{-1} T T T R R R. \quad (4.22)$$

Commutandole, d'altra parte, nell'ordine inverso, si ha

$$T T T^{(1)(2)(3)} = \left(R^{(23)} \right)^{-1} \left(R^{(13)} \right)^{-1} \left(R^{(12)} \right)^{-1} T T T R R R. \quad (4.23)$$

L'equazione

$$R^{(12)(13)(23)} R R R = R R R^{(23)(13)(12)} \quad (4.24)$$

è condizione sufficiente affinché (4.22) sia uguale a (4.23). La relazione (4.24) è detta equazione di Yang-Baxter e, come vedremo in seguito, giocherà un ruolo fondamentale nella costruzioni di modelli quantistici esattamente risolubili. Osserviamo che, se $R(\lambda, \mu)$ è soluzione di (4.24), lo è anche $R'(\lambda, \mu) := \chi(\lambda, \mu)R(\lambda, \mu)$, dove $\chi(\lambda, \mu)$ è una generica funzione a valori in \mathbb{C} .

Il quadro introdotto ci permette di dare una definizione di modelli quantistici integrabili. Osserviamo infatti che:

1. dato un sistema quantistico unidimensionale su una catena con M siti, siano $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ la sua hamiltoniana e \mathcal{H} lo spazio di Hilbert degli stati. Associamo ad ogni sito un operatore di Lax $L(m; \lambda) : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$, $m = 1, \dots, M$, tale che, costruite secondo le definizioni (4.3) e (4.4) la matrice di monodromia e la matrice di trasferimento, valga, per qualche set di coefficienti complessi c_{ka} e di parametri spettrali ν_a ,

$$H = \sum_k \sum_a c_{ka} \frac{d^k}{d\lambda^k} \ln \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu_a}. \quad (4.25)$$

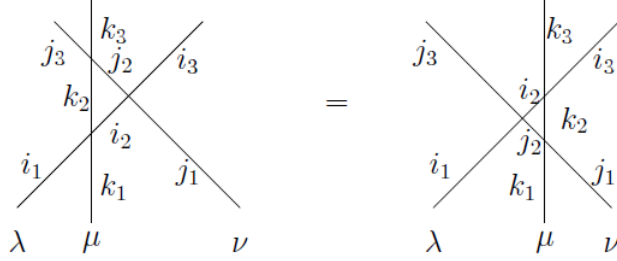


Figura 4.1: Rappresentazione grafica dell'equazione di Yang-Baxter: ogni direzione ha associato un parametro spettrale, ogni nodo coincide con una delle matrici R coinvolte in (4.27) e ogni segmento compreso tra due nodi è caratterizzato da uno degli indici di matrice.

Se esiste una matrice $R : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ che soddisfi, insieme alla matrice di monodromia, l'equazione (4.21), allora vale (4.17). L'equazione (4.25) implica

$$[H, \tau(\mu)] = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{C}. \quad (4.26)$$

Sviluppando $\tau(\mu)$ in serie di potenze di μ , si ha che tutti i coefficienti dello sviluppo commutano tra loro e con H ; abbiamo così ottenuto un set di quantità conservate mutuamente commutanti.

2. Torniamo all'equazione di Yang-Baxter e scriviamola in componenti,

$$R(\lambda, \mu)_{k_1, k_2}^{i_1, i_2} R_{i_2, i_3}^{j_1, j_2}(\lambda, \nu) R_{k_2, k_3}^{j_2, j_3}(\mu, \nu) = R_{k_1, k_2}^{j_1, j_2}(\mu, \nu) R_{i_1, i_2}^{j_2, j_3}(\lambda, \nu) R(\lambda, \mu)_{k_2, k_3}^{i_2, i_3}. \quad (4.27)$$

Possiamo interpretare graficamente questa relazione secondo la figura 4.1. Se associamo, ad ogni matrice R , una matrice di *scattering* a due corpi e, a ciascun parametro spettrale, la rapidità di una particella, l'equazione di Yang-Baxter stabilisce che lo stato finale ottenuto in un processo di interazione è indipendente dall'ordine degli urti; questa proprietà era già stata osservata nei modelli risolti nel capitolo precedente tramite il *Bethe ansatz* delle coordinate.

Queste due osservazioni ci portano a considerare un modello corrispondente ad una soluzione dell'equazione di Yang-Baxter come definizione di modello integrabile quantistico. In generale, può essere molto complicato costruire gli operatori di Lax associati ad un sistema di hamiltoniana nota. Pertanto, spesso si procede in modo inverso, costruendo, a partire da una soluzione dell'equazione di Yang-Baxter, la hamiltoniana di un modello quantistico (si veda la sezione successiva).

4.2 Modelli fondamentali di spin

Consideriamo una matrice R tale che esista una funzione a valori complessi $\phi(\lambda, \nu)$ che realizzi l'identità

$$\phi(\lambda, \nu) R(\lambda, \nu) \Big|_{\lambda=\nu} = \Pi. \quad (4.28)$$

Se vogliamo costruire un set di operatori di Lax, una possibile scelta è quella di dare loro la stessa struttura della matrice R ; infatti è evidente l'analogia tra (4.6) e l'equazione di Yang-Baxter. In particolare, scegliendo

$$(L(m; \lambda))_{i,j}^{\alpha_m, \beta_m} := \phi(\lambda, \nu) (R(\lambda, \nu))_{i,j}^{\alpha_m, \beta_m}, \quad (4.29)$$

l'equazione (4.6) è verificata per ogni $m = 1, \dots, M$. Un operatore L così definito si dice *operatore fondamentale di Lax*. Chiaramente, vale

$$L(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu} = \Pi. \quad (4.30)$$

Questa identificazione porta alla necessità di scegliere \mathcal{H}_m isomorfo a \mathcal{V} , per ogni $m = 1, \dots, M$.

Introduciamo una catena con M siti con condizioni al contorno periodiche e associamo, ad ogni sito, un operatore $L(m; \lambda)$ definito da (4.29) e il corrispondente spazio \mathcal{H}_m . Indichiamo lo spazio quantistico relativo a tutta la catena con

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}_m. \quad (4.31)$$

L'operatore definito in (4.29) soddisfa le equazioni (4.5) e (4.6): dunque, se definiamo la matrice di monodromia,

$$T_{i,j}^{\{\alpha\}\{\beta\}}(\lambda) = L_{i,k_1}^{\alpha_M \beta_M}(M; \lambda) L_{k_1, k_2}^{\alpha_{M-1} \beta_{M-1}}(M-1; \lambda) \dots L_{k_{M-1}, j}^{\alpha_1 \beta_1}(1; \lambda), \quad (4.32)$$

e la matrice di trasferimento,

$$\tau^{\{\alpha\}\{\beta\}}(\lambda) = T_{i,i}^{\{\alpha\}\{\beta\}}(\lambda), \quad (4.33)$$

vale l'equazione (4.17). Questo ci dà la possibilità di costruire un set di operatori mutuamente commutanti. Si noti che abbiamo indicato la sequenza di indici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ con l'apice $\{\alpha\}$.

Identità di traccia

Per identità di traccia si intendono le relazioni che legano la matrice di trasferimento alle quantità mutuamente commutanti che possiamo interpretare come grandezze conservate. Per ottenerle, si osserva preliminarmente che

$$T(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu} = \begin{matrix} (0,M)(0,M-1) & (0,2)(0,1) \\ \Pi & \Pi & \dots & \Pi & \Pi \end{matrix}. \quad (4.34)$$

Esprimendo in componenti e calcolandone la traccia, si arriva a

$$\tau(\lambda)^{\{\alpha\}\{\beta\}} \Big|_{\lambda=\nu} = \delta_{\alpha_M \beta_{M-1}} \delta_{\alpha_{M-1} \beta_{M-2}} \dots \delta_{\alpha_2 \beta_1} \delta_{\alpha_1 \beta_M}, \quad (4.35)$$

Generalmente, è più comodo esprimere le identità di traccia tramite il logaritmo della matrice di trasferimento e le sue derivate. Poiché

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu} = \tau^{-1}(\nu) \tau(\nu), \quad (4.36)$$

invertendo $\tau(\lambda)$, si ottiene

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{d\lambda} \ln \tau(\lambda) \right)^{\{\alpha\}\{\beta\}} \Big|_{\lambda=\nu} = \\ & = \sum_{m=1}^M \delta_{\alpha_M \beta_M} \dots \delta_{\alpha_{m+1} \beta_{m+1}} (L'(m; \nu))^{\alpha_{m-1} \beta_m}_{\alpha_m \beta_{m-1}} \delta_{\alpha_{m-2} \beta_{m-2}} \dots \delta_{\alpha_1 \beta_1}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

dove, per le condizioni al contorno periodiche, si ha $\alpha_1 = \alpha_{M+1}$ e $\alpha_0 = \alpha_M$. Definiamo

$$h_{\alpha_{m-1} \alpha_m | \beta_{m-1} \beta_m} = (L'(m; \nu))^{\alpha_{m-1} \beta_m}_{\alpha_m \beta_{m-1}} \quad (4.38)$$

e $H_{m-1,m} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, le cui componenti sono

$$H_{m-1,m}^{\{\alpha\}\{\beta\}} = \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_{m+1} \beta_{m+1}} h_{\alpha_{m-1} \alpha_m | \beta_{m-1} \beta_m} \delta_{\alpha_{m-2} \beta_{m-2}} \dots \delta_{\alpha_1 \beta_1}. \quad (4.39)$$

Possiamo scrivere

$$H := \frac{d}{d\lambda} \ln \tau(\lambda) \Big|_{\lambda=\nu} = \sum_{m=1}^M H_{m-1,m}. \quad (4.40)$$

Interpretiamo H come hamiltoniana del sistema che stiamo costruendo: dato che $H_{m-1,m}$ agisce in modo non banale solo sugli spazi \mathcal{H}_{m-1} e \mathcal{H}_m , H descriverà l'interazione tra siti reticolari adiacenti (cioè un'interazione a primi vicini).

Sviluppando $\ln \tau(\lambda)$ in serie di Taylor intorno al punto $\lambda = \nu$, si ha

$$\ln \tau(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \nu)^n I_n, \quad (4.41)$$

dove gli operatori I_n sono definiti da

$$I_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \ln \tau(\lambda) \right] \Big|_{\lambda=\nu}. \quad (4.42)$$

Data la commutatività delle matrici di trasferimento, abbiamo

$$[I_n, I_m] = 0, \quad \forall n, m \geq 1 \quad (4.43)$$

e, in particolare,

$$[I_n, H] = 0, \quad \forall n \neq 1. \quad (4.44)$$

Poiché H è la hamiltoniana del sistema, tutte le grandezze descritte dagli I_n sono conservate. In linea di principio, avremmo potuto scegliere I_n con $n \neq 1$ come hamiltoniana, ottenendo un modello differente.

Dal punto di vista fisico, possiamo immaginare che su ciascun sito si trovi uno spin. Per questa ragione, chiamiamo i modelli così costruiti *modelli fondamentali di spin*; in particolare, se consideriamo $\mathcal{H}_1 = \dots = \mathcal{H}_M = \mathcal{V} = \mathbb{C}^2$, i modelli che otteniamo descrivono l'interazione tra spin $\frac{1}{2}$ posti sui siti della catena.

Alcune soluzioni dell'equazione di Yang-Baxter

Introduciamo una rappresentazione per operatori definiti sul prodotto tensoriale di due spazi bidimensionali (ad esempio, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$). Supponiamo che gli indici relativi a questi spazi possano assumere (per futura convenienza) valore 0 o 1. Rappresentiamo un operatore A , definito sul suddetto spazio, come

$$A = \begin{pmatrix} A_{00}^{00} & A_{01}^{00} & A_{00}^{01} & A_{01}^{01} \\ A_{10}^{00} & A_{11}^{00} & A_{10}^{01} & A_{11}^{01} \\ A_{00}^{10} & A_{01}^{10} & A_{00}^{11} & A_{01}^{11} \\ A_{10}^{10} & A_{11}^{10} & A_{10}^{11} & A_{11}^{11} \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Consideriamo adesso un operatore $R : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ della forma

$$R(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} a(\lambda, \nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda, \nu) & c(\lambda, \nu) & 0 \\ 0 & c(\lambda, \nu) & b(\lambda, \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\lambda, \nu) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

e supponiamo che soddisfi l'equazione (4.24). Indichiamo le componenti di R senza apici, quelle di R con un apice e quelle di R con 2 apici, ovvero associamo, ad un diverso numero di apici, la dipendenza da una diversa coppia di parametri spettrali.

Dato il carattere tensoriale della (4.24), in linea di principio, avremmo a che fare con 64 equazioni scalari. In virtù della struttura in (4.46), si vede che, delle 64 equazioni, solo 20 sono non banali. Queste 20 si riducono ulteriormente, in virtù della simmetria delle componenti sotto l'inversione degli indici, a 10, delle quali solo le seguenti tre sono indipendenti,

$$\begin{aligned} ac'a'' &= bc'b'' + ca'c'', \\ ab'c'' &= ba'c'' + cc'b'', \\ cb'a'' &= ca'b'' + bc'c''. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Manipolando le equazioni (4.47), si trova

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{a'b'} = \frac{a''^2 + b''^2 - c''^2}{a''b''}. \quad (4.48)$$

Poiché questa condizione vale per ogni scelta dei parametri spettrali, il rapporto $\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$ deve essere una costante: chiamiamo la sua metà

$$\Delta := \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (4.49)$$

Possiamo concludere che una matrice R della forma (4.46), le cui componenti soddisfino (4.49), è soluzione dell'equazione di Yang-Baxter.

Consideriamo le seguenti componenti,

$$a(\lambda, \nu) = \frac{\lambda - \nu + \eta}{\lambda - \nu - \eta}, \quad b(\lambda, \nu) = 1, \quad c(\lambda, \nu) = \frac{2\eta}{\lambda - \nu - \eta}. \quad (4.50)$$

dove λ e ν sono i parametri spettrali, mentre η è una costante complessa. Si verifica che queste soddisfano (4.49), individuando la cosiddetta matrice R razionale.

Tramite semplici relazioni trigonometriche, si verifica che anche la seguente scelta individua una soluzione dell'equazione di Yang-Baxter,

$$a(\lambda, \nu) = \frac{\sin(\lambda - \nu + \eta)}{\sin(\lambda - \nu - \eta)}, \quad b(\lambda, \nu) = 1, \quad c(\lambda, \nu) = \frac{\sin(2\eta)}{\sin(\lambda - \nu - \eta)}. \quad (4.51)$$

Tale soluzione prende il nome di matrice R trigonometrica.

Osserviamo che la soluzione razionale può essere ottenuta da quella trigonometrica, ridefinendo i parametri nella (4.51) in modo che $\lambda \rightarrow \epsilon\lambda$, $\nu \rightarrow \epsilon\nu$ e $\eta \rightarrow \epsilon\eta$ e valutando il limite per ϵ tendente a 0.

Questi sono solo due possibili esempi di soluzioni dell'equazione di Yang-Baxter: ne sono note altre sia per $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ che per una diversa scelta di \mathcal{V} .

Catena di Heisenberg XXZ

Consideriamo la matrice R trigonometrica e mostriamo che il modello fondamentale di spin corrispondente è la catena di Heisenberg XXZ di spin $\frac{1}{2}$.

L'espressione esplicita, ottenuta da (4.46) e (4.51) con una ridefinizione $\lambda \rightarrow \lambda + \eta$, è

$$R_{trig}(\lambda, \nu) := \begin{pmatrix} \frac{\sin(\lambda-\nu+2\eta)}{\sin(\lambda-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(2\eta)}{\sin(\lambda-\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(2\eta)}{\sin(\lambda-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(\lambda-\nu+2\eta)}{\sin(\lambda-\nu)} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Vogliamo, per prima cosa, costruire l'operatore fondamentale di Lax associato a R_{trig} : rispetto a (4.29), scegliamo $\phi(\lambda, \nu) = -\sin(\lambda - \nu)$ e fissiamo il parametro spettrale $\nu = \frac{\pi}{2} + \eta$. La matrice così ottenuta può essere espressa a blocchi come

$$L(m; \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda + \eta\sigma_m^{(z)}) & \sigma_m^{(-)} \sin 2\eta \\ \sigma_m^{(+)} \sin 2\eta & \cos(\lambda - \eta\sigma_m^{(z)}) \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Questa matrice verifica

$$L\left(m; \lambda = \frac{\pi}{2} + \eta\right) = (\sin 2\eta) \Pi \quad (4.54)$$

e, pertanto, soddisfa le proprietà richieste ad un operatore fondamentale di Lax.

Se costruiamo la matrice di trasferimento $\tau_{trig}(\lambda)$, con riferimento alle equazioni (4.37)-(4.40), possiamo verificare che

$$H_{XXZ} := 2 \sin 2\eta \frac{d}{d\lambda} \tau_{trig}(\lambda) \Big|_{\lambda=\frac{\pi}{2}+\eta} - M \cos 2\eta = \sum_{m=1}^M \left(\sigma_{m-1}^{(x)} \sigma_m^{(x)} + \sigma_{m-1}^{(y)} \sigma_m^{(y)} + \Delta \sigma_{m-1}^{(z)} \sigma_m^{(z)} \right), \quad (4.55)$$

che è la hamiltoniana della catena XXZ. Si verifica che l'anisotropia può essere scritta come

$$\Delta = \cos 2\eta. \quad (4.56)$$

Ponendo $\Delta = 1$ in (4.55), si ottiene la hamiltoniana della catena XXX di spin $\frac{1}{2}$, che può essere costruita operando come sopra, a partire dalla matrice R razionale. Si noti che $R_{trig} \Big|_{\eta=0} = \Pi$, che è soluzione banale dell'equazione di Yang-Baxter; per ottenere la matrice R della catena XXX è necessario invece effettuare il limite discusso in precedenza su R_{trig} , ottenendo la soluzione razionale.

4.3 Modelli fondamentali a vertici

Abbiamo visto che da ogni soluzione dell'equazione di Yang-Baxter possiamo costruire un modello di meccanica quantistica su reticolo unidimensionale. Vedremo che ad ogni soluzione di (4.24) corrisponde anche un modello di meccanica statistica classica su reticolo bidimensionale, che chiameremo *modello fondamentale a vertici*. Vedremo che, data una matrice R , c'è una dualità tra il modello fondamentale di spin e il modello fondamentale a vertici corrispondente. Tale dualità consiste nella possibilità di scrivere la funzione di partizione del modello bidimensionale in termini della matrice di monodromia della catena di spin.

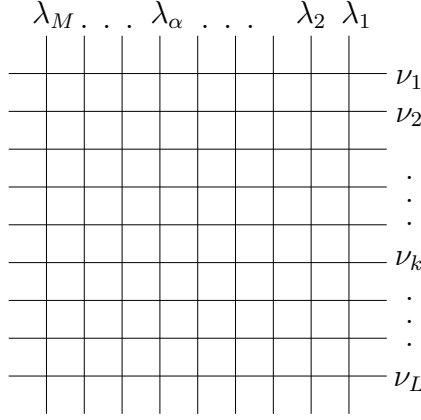
Consideriamo un reticolo bidimensionale con M linee verticali e L linee orizzontali. Le linee verticali sono identificate da indici greci (crescenti da destra a sinistra) e da un parametro spettrale complesso λ_α , $\alpha = 1, \dots, M$, mentre quelle orizzontali da indici latini (crescenti dall'alto verso il basso) e da ν_k , $k = 1, \dots, L$.

Supponiamo di conoscere una soluzione dell'equazione di Yang-Baxter $R(\lambda, \nu) : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ e costruiamo una *matrice di peso statistico* di componenti

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{b_{\alpha k} b'_{\alpha, k}}^{a_{\alpha k} a'_{\alpha k}} = \phi(\lambda_\alpha, \nu_k) (R(\lambda_\alpha, \nu_k))_{b_{\alpha k} b'_{\alpha k}}^{a_{\alpha k} a'_{\alpha k}}. \quad (4.57)$$

Questa definizione è analoga alla (4.29). Se la dimensione di \mathcal{V} è d , gli indici $a_{\alpha k}, a'_{\alpha k}, b_{\alpha k}, b'_{\alpha k}$ (detti *variabili di spin*) assumeranno valori compresi tra 1 e d .

L'operatore $L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k)$ è associato al sito dato dall'intersezione tra la linea α e la linea k : assegniamo ad ognuno dei quattro spigoli intorno al sito uno dei quattro indici, come mostrato in figura (4.3). Questo può essere

Figura 4.2: Reticolo quadrato $L \times M$

formalizzato assegnando ad ogni linea orizzontale uno spazio vettoriale \mathcal{H}_k e ad ogni linea verticale uno spazio vettoriale \mathcal{V}_α , tutti isomorfi a \mathcal{V} . Così facendo, possiamo pensare l'operatore $L_{\alpha k}$ definito su $\mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{H}_k$: gli indici che abbiamo assegnato agli spigoli orizzontali (verticali) sono relativi allo spazio orizzontale (verticale).

Funzioni di partizione di modelli fondamentali a vertici

Immaginiamo che il modello sia caratterizzato dalla presenza, su ciascuno spigolo, di variabili discrete (spin) che assumono valori da 1 a d e associamo, a ogni componente di $L_{\alpha k}$, il valore del peso statistico relativo alla configurazione di spin descritta dai suoi indici (detta configurazione di vertice).

Uno stato del sistema è dato specificando il valore degli spin su ciascuno spigolo: assumiamo che il peso statistico sia dato dal prodotto dei pesi statistici delle configurazioni di vertice. Il peso statistico relativo allo stato S è

$$\left(\omega^{(S)}(\{\lambda\}, \{\nu\})\right)_{\{b\}\{b'\}}^{\{a\}\{a'\}} = \prod_{(\alpha, k)} \left(L_{(\alpha, k)}(\lambda_\alpha, \nu_k)\right)_{b_{\alpha k} b'_{\alpha k}}^{a_{\alpha k} a'_{\alpha k}}, \quad (4.58)$$

dove $\{a\}$ e $\{b\}$ sono multi-indici che contengono, rispettivamente, gli indici relativi a tutti gli spigoli orizzontali e quelli relativi a tutti gli spigoli verticali, mentre $\{\lambda\}$ e $\{\nu\}$ rappresentano tutti i parametri spettrali. Il prodotto che compare in questa definizione è svolto su tutti i siti reticolari ed è un prodotto tra componenti, costruito in modo tale che gli indici relativi allo stesso spigolo, in comune a due matrici diverse, abbiano lo stesso valore. Si noti che, in questa formula, non è sottintesa la somma sugli indici ripetuti.

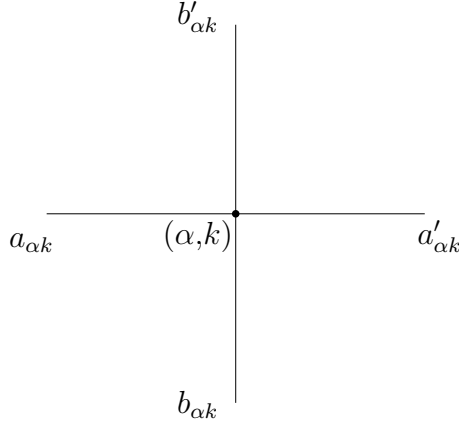


Figura 4.3: La corrispondenza tra gli indici dell'operatore $(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{b_{\alpha k} b'_{\alpha, k}}^{a_{\alpha k} a'_{\alpha k}}$ e gli spigoli intorno al sito (α, k)

Chiamiamo spigoli interni gli spigoli collegati a due vertici e spigoli esterni quelli collegati ad un solo vertice. Definiamo

$$Z(\{\lambda\}, \{\nu\}) := \sum_S \omega^{(S)}(\{\lambda\}, \{\nu\}), \quad (4.59)$$

dove la somma è effettuata su tutte le configurazioni di spin interni e trasforma il prodotto tra numeri della formula (4.58) in un prodotto matriciale; Z dipenderà solo dal valore degli spin di bordo, che verranno fissati dalle condizioni al contorno. Possiamo riscrivere (4.59) come

$$Z(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \prod_{(\alpha, k)} L_{\alpha, k}(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (4.60)$$

dove il prodotto coinvolge tutti i siti reticolari ed è ordinato dall'ultimo al primo sito e svolto, equivalentemente, o prima lungo le linee orizzontali e poi lungo quelle verticali o viceversa. Il membro sinistro della (4.60) è un tensore, definito su $\otimes_{\alpha=1}^M \mathcal{V}_\alpha \otimes \otimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k$, le cui componenti sono indicate da

$$(Z(\{\lambda\}, \{\nu\}))_{b_{1L} \dots b_{ML}; b'_{11} \dots b'_{M1}}^{a_{M1} \dots a_{ML}; a'_{11} \dots a'_{1L}} := (Z(\{\lambda\}, \{\nu\}))_{\{d\}\{u\}}^{\{l\}\{r\}}, \quad (4.61)$$

dove abbiamo introdotto una notazione più conveniente per le variabili di spin degli spigoli esterni:

$$\begin{aligned} a_{M1}, \dots, a_{ML} &\rightarrow l_1, \dots, l_L, & a'_{11}, \dots, a'_{1L} &\rightarrow r_1, \dots, r_L, \\ b_{1L}, \dots, b_{ML} &\rightarrow d_1, \dots, d_M, & b'_{11}, \dots, b'_{M1} &\rightarrow u_1, \dots, u_M. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Imporre le condizioni al contorno periodiche corrisponde a fissare

$$u_\alpha = d_\alpha, \quad \forall \alpha = 1, \dots, M, \quad l_k = r_k, \quad \forall k = 1, \dots, L. \quad (4.63)$$

La funzione di partizione sarà ottenuta sommando su tutti i possibili valori degli spin di bordo,

$$Z_{per}(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \sum_{\{u\}\{l\}} (Z(\{\lambda\}, \{\nu\})_{\{u\}\{l\}}^{\{l\}\{l\}}). \quad (4.64)$$

Il modello in cui i parametri spettrali sono gli stessi in ogni sito è detto *omogeneo*. In caso contrario, si parla di modello *non omogeneo*.

Relazione tra modelli di spin e modelli a vertici fondamentali

In virtù di (4.57), vale

$$R_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k) L_{\beta k}(\lambda_\beta, \nu_k) = L_{\beta k}(\lambda_\beta, \nu_k) L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k) R_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta). \quad (4.65)$$

Possiamo definire, per il modello bidimensionale, un oggetto identico alla matrice di monodromia (4.3),

$$T_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \otimes \bigotimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{V}_\alpha \otimes \bigotimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k, \quad (4.66)$$

$$T_\alpha(\lambda_\alpha, \{\nu\}) := (L_{\alpha L}(\lambda_\alpha, \nu_L)) \left(L_{\alpha(L-1)}(\lambda_\alpha, \nu_{L-1}) \right) \dots (L_{\alpha 1}(\lambda_\alpha, \nu_1)). \quad (4.67)$$

Stavolta, abbiamo una matrice di monodromia, che chiamiamo *verticale*, diversa per ogni linea α , con $\alpha = 1, \dots, M$. Data l'interpretazione grafica in figura 4.3, possiamo visualizzare T_α tramite la figura 4.4.

Si verifica che è possibile riscrivere l'equazione (4.60) come

$$Z = T_M(\lambda_M, \{\nu\}) T_{M-1}(\lambda_{M-1}, \{\nu\}) \dots T_1(\lambda_1, \{\nu\}). \quad (4.68)$$

Per ottenere Z_{per} , è sufficiente calcolare la traccia (rispetto a tutti gli indici) di ambo i membri della (4.68).

Se definiamo la *matrice di trasferimento verticale*,

$$\tau_\alpha : \bigotimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k, \quad (4.69)$$

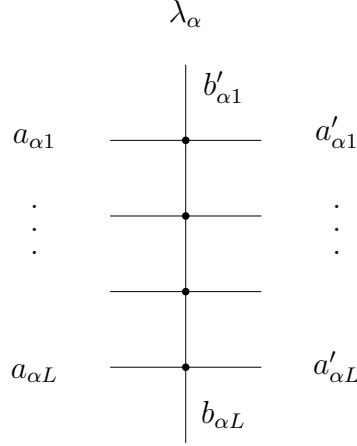


Figura 4.4: Rappresentazione grafica della matrice di monodromia relativa alla linea verticale α

$$\tau_\alpha(\lambda_\alpha, \{\nu\}) := Tr_{\mathcal{V}_\alpha} T_\alpha(\lambda_\alpha, \{\nu\}), \quad (4.70)$$

possiamo riscrivere l'equazione (4.64),

$$Z_{per}(\{\lambda\}, \{\nu\}) = Tr_{\bigotimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k} [\tau_M(\lambda_M, \{\nu\}) \tau_{M-1}(\lambda_{M-1}, \{\nu\}) \dots \tau_1(\lambda_1, \{\nu\})]. \quad (4.71)$$

Considerando il modello fondamentale di spin relativo alla medesima matrice R e identificando la matrice di peso statistico (4.57) con l'operatore di Lax definito in (4.29), l'equazione (4.71) mostra la dualità menzionata in precedenza.

In virtù delle equazioni (4.65), (4.67) e (4.70), vale

$$[\tau_\alpha(\lambda_\alpha, \{\nu\}), \tau_\beta(\lambda_\beta, \{\nu\})] = 0 \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, M, \quad (4.72)$$

quindi le matrici di trasferimento relative a linee verticali diverse possono essere diagonalizzate simultaneamente.

Chiamiamo $(\Theta_p^{(\alpha)})$, $p = 1, \dots, N^L$, l'insieme degli autovalori dell'operatore $\tau_\alpha(\lambda_\alpha, \{\nu\})$ (N^L è la dimensione dello spazio $\bigotimes_{k=1}^L \mathcal{H}_k$). Possiamo facilmente ottenere

$$Z_{per}(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \sum_{p=1}^{N^L} \prod_{\alpha=1}^M \Theta_p^{(\alpha)}. \quad (4.73)$$

Per un modello omogeneo, $\Theta_p := \Theta_p^{(\alpha)} = \Theta_p^{(\beta)}$, $\forall \alpha, \beta = 1, \dots, M$, e, quindi,

$$Z_{per}(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \sum_{p=1}^{N^L} (\Theta_p)^M. \quad (4.74)$$

Per la densità di energia libera per sito, se il limite esiste finito, si ottiene un risultato analogo a (2.20),

$$f = -k_B T \lim_{M, L \rightarrow \infty} \frac{\ln \Theta_{max}}{L}, \quad (4.75)$$

dove Θ_{max} è l'autovalore massimo.

4.4 *Bethe ansatz* algebrico

Il *Bethe ansatz algebrico* è un metodo che permette di trovare autostati ed autovalori della matrice di trasferimento. Dato che possiamo costruire modelli con hamiltoniana funzionalmente collegata alla matrice di trasferimento, siamo in grado di ottenere autovalori ed autovettori dell'energia.

La relazione tra il *Bethe ansatz* algebrico e quello delle coordinate è analoga a quella tra la risoluzione del problema spettrale dell'oscillatore armonico quantistico tramite gli operatori di creazione e distruzione e il calcolo esplicito delle funzioni d'onda in rappresentazione delle coordinate tramite l'equazione di Schrödinger stazionaria.

Limitiamoci al caso particolare di un modello unidimensionale, in cui \mathcal{V} e \mathcal{H}_m , $m = 1, \dots, M$ siano isomorfi a \mathbb{C}^2 . Lo spazio quantistico globale \mathcal{H} è dato da $\bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}_m$. Consideriamo una matrice di monodromia $T(\lambda) : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$ e rappresentiamola come matrice sullo spazio \mathcal{V} ,

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

in modo tale che A, B, C e D siano operatori definiti sullo spazio \mathcal{H} .

Supponiamo che esista una matrice R della forma

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

che soddisfi insieme a $T(\lambda)$ la relazione (4.21). Esplicitando quest'ultima equazione in termini delle componenti dei due operatori, si ottengono 16 regole di commutazione che vanno a definire quella che viene detta *algebra di Yang-Baxter*:

$$[A(\lambda), A(\mu)] = 0, \quad [B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad [C(\lambda), C(\mu)] = 0, \quad [D(\lambda), D(\mu)] = 0, \quad (4.78)$$

$$A(\mu)B(\lambda) = f(\mu, \lambda)B(\lambda)A(\mu) + g(\lambda, \mu)B(\mu)A(\lambda), \quad (4.79)$$

$$D(\mu)B(\lambda) = f(\lambda, \mu)B(\lambda)D(\mu) + g(\mu, \lambda)B(\mu)D(\lambda), \quad (4.80)$$

$$C(\lambda)A(\mu) = f(\mu, \lambda)A(\mu)C(\lambda) + g(\lambda, \mu)A(\lambda)C(\mu), \quad (4.81)$$

$$C(\lambda)D(\mu) = f(\lambda, \mu)D(\mu)C(\lambda) + g(\mu, \lambda)D(\lambda)C(\mu), \quad (4.82)$$

$$B(\mu)A(\lambda) = f(\mu, \lambda)A(\lambda)B(\mu) + g(\lambda, \mu)A(\mu)B(\lambda), \quad (4.83)$$

$$B(\lambda)D(\mu) = f(\mu, \lambda)D(\mu)B(\lambda) + g(\lambda, \mu)D(\lambda)B(\mu), \quad (4.84)$$

$$A(\lambda)C(\mu) = f(\mu, \lambda)C(\mu)A(\lambda) + g(\lambda, \mu)C(\lambda)A(\mu), \quad (4.85)$$

$$D(\mu)C(\lambda) = f(\mu, \lambda)C(\lambda)D(\mu) + g(\lambda, \mu)C(\mu)D(\lambda), \quad (4.86)$$

$$[C(\lambda), B(\mu)] = g(\lambda, \mu) (A(\lambda)D(\mu) - A(\mu)D(\lambda)), \quad (4.87)$$

$$[B(\lambda), C(\mu)] = g(\lambda, \mu) (D(\lambda)A(\mu) - D(\mu)A(\lambda)), \quad (4.88)$$

$$[D(\lambda), A(\mu)] = g(\lambda, \mu) (B(\lambda)C(\mu) - B(\mu)C(\lambda)), \quad (4.89)$$

$$[A(\lambda), D(\mu)] = g(\lambda, \mu) (C(\lambda)B(\mu) - C(\mu)B(\lambda)), \quad (4.90)$$

Queste relazioni sono valide per ogni coppia di parametri complessi λ e μ . Si noti che abbiamo assunto $g(-\lambda, -\mu) = -g(\lambda, \mu)$ (consistentemente con i modelli analizzati in seguito).

Assumiamo che esista lo stato $|0\rangle \in \mathcal{H}$ (che chiamiamo stato di vuoto) tale che, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle. \quad (4.91)$$

Le funzioni a valori complessi $a(\lambda)$ e $d(\lambda)$ sono detti autovalori del vuoto. Assumiamo anche l'esistenza di uno stato di vuoto duale $\langle 0|$ tale che

$$\langle 0|B(\lambda) = 0, \quad \langle 0|A(\lambda) = a(\lambda)\langle 0|, \quad \langle 0|D(\lambda) = d(\lambda)\langle 0|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.92)$$

e richiediamo che i due stati soddisfino

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (4.93)$$

I vettori $|0\rangle$ e $\langle 0|$ sono autostati della matrice di trasferimento $\tau(\lambda) = \text{Tr}_{\mathcal{V}} T(\lambda)$,

$$\tau(\lambda)|0\rangle = (a(\lambda) + d(\lambda))|0\rangle, \quad \langle 0|\tau(\lambda) = (a(\lambda) + d(\lambda))\langle 0|. \quad (4.94)$$

Osserviamo che modelli associati alla stessa matrice R hanno la stessa algebra di Yang-Baxter, mentre gli autovalori $a(\lambda)$ e $d(\lambda)$ variano al variare del modello studiato.

Costruzione dello stato di vuoto

Dalla definizione (4.3), si vede che gli operatori $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$ e $D(\lambda)$ dipendono dagli operatori associati a ciascun sito in modo non banale. Consideriamo allora $L(m; \lambda) : \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}_m$ e rappresentiamolo in forma di matrice su \mathcal{V} ,

$$L(m; \lambda) = \begin{pmatrix} A_m(\lambda) & B_m(\lambda) \\ C_m(\lambda) & D_m(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

Se esiste un vettore $|0\rangle_m \in \mathcal{H}_m$, per ogni $m = 1 \dots M$, con le proprietà, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} C_m(\lambda)|0\rangle_m &= 0, \\ A_m(\lambda)|0\rangle_m &= a_m(\lambda)|0\rangle_m, \\ D_m(\lambda)|0\rangle_m &= d_m(\lambda)|0\rangle_m, \end{aligned} \quad (4.96)$$

si verifica che lo stato di vuoto che soddisfa (4.91) è

$$|0\rangle = \bigotimes_{m=1}^M |0\rangle_m. \quad (4.97)$$

Per dimostrare questo fatto, è sufficiente tenere presente le strutture (4.76) e (4.95), sfruttare le proprietà (4.96) e ricordare le regole di moltiplicazione per le matrici triangolari superiori. Gli autovalori del vuoto sono, quindi,

$$a(\lambda) = \prod_{m=1}^M a_m(\lambda), \quad d(\lambda) = \prod_{m=1}^M d_m(\lambda). \quad (4.98)$$

Una costruzione analoga può essere fatta per lo stato duale $\langle 0|$: se è possibile costruire un set di stati ${}_m\langle 0|$ tali che, per ogni $m = 1 \dots M$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} {}_m\langle 0|B_m(\lambda) &= 0, \\ {}_m\langle 0|A_m(\lambda) &= a_m(\lambda) {}_m\langle 0|, \\ {}_m\langle 0|D_m(\lambda) &= d_m(\lambda) {}_m\langle 0|, \end{aligned} \quad (4.99)$$

allora,

$$\langle 0| = \bigotimes_{m=1}^M {}_m\langle 0|. \quad (4.100)$$

Affinché (4.93) sia verificata, richiediamo ${}_m\langle 0|0\rangle_m = 1, \forall m = 1, \dots M$.

Gli autostati di Bethe

In virtù di (4.91), possiamo considerare l'operatore $C(\lambda)$ come un operatore di annichilazione. D'altra parte, trattando l'operatore $B(\lambda)$ come un operatore di creazione, possiamo costruire gli autostati della matrice di trasferimento.

Consideriamo lo stato generato dall'applicazione per N volte di B , valutato per diversi parametri spettrali, sullo stato di vuoto,

$$|\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle := B(\lambda_1)B(\lambda_2)\dots B(\lambda_N)|0\rangle = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j)|0\rangle. \quad (4.101)$$

Notiamo che, per (4.78), l'ordine dei B non è rilevante.

Vogliamo capire sotto quali condizioni il vettore (4.101) è autostato della matrice di trasferimento $\tau(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$. Enunciamo, a tal proposito, il seguente risultato.

Teorema. *Lo stato*

$$|\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j)|0\rangle, \quad \lambda_j \neq \lambda_k \text{ se } j \neq k, \quad (4.102)$$

è un autostato di $\tau(\lambda)$ (detto autostato di Bethe),

$$\tau(\lambda)|\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle = \Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N)|\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\rangle, \quad (4.103)$$

se il set di parametri spettrali $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ soddisfa le equazioni di Bethe,

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{f(\lambda_j, \lambda_n)}{f(\lambda_n, \lambda_j)} = 1. \quad (4.104)$$

Inoltre, l'autovalore è

$$\Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = a(\lambda) \prod_{j=1}^N f(\lambda, \lambda_j) + d(\lambda) \prod_{j=1}^N f(\lambda_j, \lambda). \quad (4.105)$$

Dimostrazione. Consideriamo, per prima cosa, l'azione di A su (4.101). Tramite (4.79), possiamo portare A a destra della stringa di operatori B e farlo agire diagonalmente sul vuoto. Quando applichiamo questa formula, abbiamo due termini: il primo (che indicheremo con 1)) contenente la funzione f ,

mentre il secondo (indicato con 2)) contenente la funzione g . Come è facile verificare, si ottiene la seguente struttura,

$$A(\lambda) \left(\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) \right) |0\rangle = a(\lambda) \Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \left(\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) \right) |0\rangle + \sum_{j=1}^N a(\lambda_j) \Lambda_j(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) B(\lambda) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N B(\lambda_n) |0\rangle. \quad (4.106)$$

Infatti, il primo termine del membro di destra è ottenuto utilizzando ripetutamente (4.79) e mantenendo solo i termini di tipo 1), mentre tutti gli altri sono ottenuti prendendo almeno un termine di tipo 2). Nei termini di tipo 2), A e B si scambiano gli argomenti: quindi, la prima volta, $A(\lambda)B(\lambda_k) \rightarrow g(\lambda_k, \lambda)B(\lambda)A(\lambda_k)$. Dopo di questa, $A(\lambda_k)$ scambierà l'argomento con alcuni $B(\lambda_n)$. Quando arriva a contatto con lo stato di vuoto, A dipende dal parametro spettrale associato all'operatore B con cui è avvenuta per l'ultima volta la commutazione in cui è stato mantenuto il termine di tipo 2). Questo spiega la struttura (4.106). Il coefficiente Λ è semplicemente

$$\Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{j=1}^N f(\lambda, \lambda_j). \quad (4.107)$$

Per ottenere i coefficienti Λ_n , osserviamo che, poiché (4.106) è simmetrico rispetto allo scambio di $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, possiamo ottenere Λ_n da Λ_k semplicemente scambiando $\lambda_n \leftrightarrow \lambda_k$ (per ogni coppia di indici n e k). Calcolare uno solo di questi coefficienti, dunque, significa ottenerli tutti: calcoliamo Λ_1 , ovvero il coefficiente ottenuto se l'unico termine di tipo 2) che consideriamo si ha commutando A con $B(\lambda_1)$. Si trova

$$\Lambda_1(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = g(\lambda_1, \lambda) \prod_{j=2}^N f(\lambda_1, \lambda_j). \quad (4.108)$$

Il generico coefficiente Λ_n sarà allora

$$\Lambda_n(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = g(\lambda_n, \lambda) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N f(\lambda_n, \lambda_j). \quad (4.109)$$

In modo del tutto analogo, usando la relazione (4.80), possiamo ricavare l'azione di D sullo stato (4.101),

$$D(\lambda) \left(\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) \right) |0\rangle = d(\lambda) \tilde{\Lambda}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \left(\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) \right) |0\rangle + \sum_{n=1}^N d(\lambda_n) \tilde{\Lambda}_n(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) B(\lambda) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N B(\lambda_j) |0\rangle, \quad (4.110)$$

con

$$\tilde{\Lambda}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{j=1}^N f(\lambda_j, \lambda), \quad (4.111)$$

$$\tilde{\Lambda}_n(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = g(\lambda, \lambda_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N f(\lambda_j, \lambda_n). \quad (4.112)$$

Lo stato (4.102), in generale, non è autostato di A o D separatamente, però possiamo scegliere i parametri spettrali in modo tale che sia autostato di $A(\lambda) + D(\lambda)$. Imponendo che i termini dentro le somme in (4.106) e (4.110) si cancellino reciprocamente, si ha il set di equazioni,

$$a(\lambda_n) \Lambda_n(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) + d(\lambda_n) \tilde{\Lambda}_n(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.113)$$

Esplicitando le funzioni Λ_n e $\tilde{\Lambda}_n$, si trova (4.104). I corrispondenti autovalori sono

$$\Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = a(\lambda) \Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) + d(\lambda) \tilde{\Lambda}(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad (4.114)$$

equivalenti a (4.105). \square

Questa procedura di costruzione degli autovettori e degli autovalori della matrice di trasferimento è nota come *Bethe ansatz* algebrico. L'analogia con il *Bethe ansatz* delle coordinate è resa evidente dalle equazioni (4.104); infatti, in entrambi i casi, costruiamo autostati della hamiltoniana dipendenti da un set di rapidità, a patto che queste siano soluzioni di un sistema di equazioni accoppiate. In particolare, per la catena XXZ, le equazioni di Bethe ottenute nell'approccio delle coordinate sono identiche a quelle ottenute nell'approccio algebrico.

Inoltre, così come il *Bethe ansatz* delle coordinate, anche l'autostato di Bethe può essere interpretato come uno stato a N particelle.

Osservazioni sul *Bethe ansatz* algebrico

Discutiamo alcune proprietà degli autostati di Bethe.

- Se lo stato di vuoto duale esiste, possiamo procedere in modo analogo, ottenendo che lo stato

$$\langle \Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) | := \langle 0 | \left(\prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \right) \quad \lambda_j \neq \lambda_k \text{ se } j \neq k \quad (4.115)$$

è autostato sinistro di $\tau(\lambda)$,

$$\langle \Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) | \tau(\lambda) = \Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \langle \Psi_N |, \quad (4.116)$$

se $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ soddisfano (4.104). Gli autovalori sono ancora dati da (4.105).

- Se consideriamo due set diversi di parametri spettrali $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_C}\}$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_B}\}$, vale

$$\langle \Psi_{N_C}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_C}) | \Psi_{N_B}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_B}) \rangle = 0, \quad (4.117)$$

ovvero i due stati sono ortogonali. Se $N_C \neq N_B$, sfruttando l'algebra di Yang-Baxter, è facile da verificare; in questo caso, non è necessario che i due stati siano autostati di Bethe. Se, invece, $N_C = N_B$, gli stati sono ortogonali se sono autostati di Bethe. Per vederlo, osserviamo che

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{N_C}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_C}) | \tau(\lambda) | \Psi_{N_B}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_B}) \rangle &= \\ &= \Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_C}) \langle \Psi_{N_C}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_C}) | \Psi_{N_B}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_B}) \rangle = \\ &= \Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_B}) \langle \Psi_{N_C}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_C}) | \Psi_{N_B}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_B}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Essendo i due autovalori diversi, l'unica possibilità è che valga (4.117).

- Abbiamo imposto $\lambda_j \neq \lambda_k$ se $j \neq k$; infatti, supponendo di avere $\lambda_1 = \lambda_2$ e considerando lo stato,

$$B^2(\lambda_1) \prod_{j=3}^N B(\lambda_j) |0\rangle, \quad (4.119)$$

se imponiamo la condizione che questo sia autovettore di $\tau(\lambda)$, otteniamo N equazioni per $N - 1$ parametri spettrali diversi. Per alcuni sistemi di interesse (ad esempio, per la catena XXZ), questo set di equazioni non ha soluzioni: non si può, quindi, costruire autostati di Bethe caratterizzati da due rapidità uguali [47].

Catena XXZ e *Bethe ansatz* algebrico

Nella sezione 3.3, abbiamo risolto esattamente il modello di Heisenberg XXZ tramite il *Bethe ansatz* delle coordinate: adesso procediamo alla trattazione con il *Bethe ansatz* algebrico e verifichiamo l'equivalenza dei due approcci.

Poiché la catena XXZ è il modello di spin fondamentale associato alla matrice R trigonometrica, consideriamo l'operatore di Lax definito nell'equazione (4.53) e costruiamo la matrice di monodromia. Dato che gli operatori di innalzamento (presenti nelle componenti C degli operatori di Lax) annichilano $|\uparrow\rangle_m$ tale che $\sigma_m^{(z)}|\uparrow\rangle_m = |\uparrow\rangle_m$, identifichiamo

$$|0\rangle_m := |\uparrow\rangle_m, \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.120)$$

In riferimento a (4.96), si ha

$$a_m(\lambda) = \cos(\lambda + \eta) \quad d_m(\lambda) = \cos(\lambda - \eta). \quad (4.121)$$

e, quindi,

$$a(\lambda) = (\cos(\lambda + \eta))^M \quad d(\lambda) = (\cos(\lambda - \eta))^M, \quad (4.122)$$

con lo stato di vuoto dato da (4.97). Le equazioni di Bethe, per l'autostato (4.102), sono

$$\left(\frac{\cos(\lambda_j - \eta)}{\cos(\lambda_j + \eta)} \right)^M = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_j + 2\eta)}{\sin(\lambda_n - \lambda_j - 2\eta)}, \quad (4.123)$$

identiche a quelle ottenute con il *Bethe ansatz* delle coordinate. L'autovalore della matrice di trasferimento è

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) &= (\cos(\lambda + \eta))^M \prod_{j=1}^N \frac{\sin(\lambda_j - \lambda + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda)} \\ &\quad + (\cos(\lambda - \eta))^M \prod_{j=1}^N \frac{\sin(\lambda - \lambda_j + 2\eta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

che è legato, tramite (4.55) e (4.56), all'autovalore di H_{XXZ} ,

$$\begin{aligned} E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= 2 \sin 2\eta \frac{d}{d\lambda} \Theta(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_N) \Big|_{\lambda=\frac{\pi}{2}+\eta} - M\Delta = \\ &= -M\Delta - \sum_{j=1}^N \epsilon(\lambda_j), \end{aligned} \quad (4.125)$$

dove $\epsilon(\lambda)$ è la relazione di dispersione (3.33). Dunque, anche gli autovalori dell'energia sono gli stessi ottenuti con il *Bethe ansatz* delle coordinate.

Abbiamo illustrato il metodo dello scattering inverso quantistico che ci ha permesso di costruire modelli quantistici integrabili. Nel prossimo capitolo descriveremo il modello a sei vertici in questo formalismo e, grazie al *Bethe ansatz* algebrico, ne calcoleremo alcune funzioni di correlazione.

Capitolo 5

Calcolo di funzioni di correlazione

5.1 Matrice di peso statistico

Mostriamo che il modello a sei vertici può essere visto come modello fondamentale a vertici relativo alla matrice R trigonometrica.

Consideriamo il modello a sei vertici, definito nel capitolo 2, su un reticolo quadrato $N \times N$. Associamo a ciascuna linea un parametro spettrale complesso, secondo la convenzione introdotta nella figura 4.2. Ogni sito reticolare sarà indicato dalla coppia di interi (α, k) . Associamo, ad ogni linea orizzontale, uno spazio vettoriale, $\mathcal{H}_k = \mathbb{C}^2$, $k = 1, \dots, N$ e, ad ogni linea verticale, uno spazio vettoriale, $\mathcal{V}_\alpha = \mathbb{C}^2$, $\alpha = 1, \dots, N$. Definiamo, inoltre,

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{V} = \bigotimes_{\alpha=1}^N \mathcal{V}_\alpha. \quad (5.1)$$

Indichiamo la base di \mathcal{H}_k , $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_k, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k \right\}$, con $\{|\uparrow\rangle_k, |\downarrow\rangle_k\}$, e, corrispondentemente, la base di \mathcal{V}_α , scambiando gli indici k con gli indici α .

Consideriamo la matrice di peso statistico relativa alla matrice R trigonometrica, $L_{\alpha k} : \mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{H}_k$,

$$L_{\alpha k} = \begin{pmatrix} a_{\alpha k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{\alpha k} & c_{\alpha k} & 0 \\ 0 & c_{\alpha k} & b_{\alpha k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{\alpha k} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

con

$$a_{\alpha k} = a(\lambda_\alpha, \nu_k) := \sin(\lambda_\alpha - \nu_k + \eta), \quad (5.3)$$

$$b_{\alpha k} = b(\lambda_\alpha, \nu_k) := \sin(\lambda_\alpha - \nu_k - \eta), \quad (5.4)$$

$$c_{\alpha k} = c := \sin(2\eta) \quad (5.5)$$

e η generico parametro complesso. Notiamo che possiamo scrivere (5.2) come

$$L_{\alpha k} = a_{\alpha k} \left(\frac{1 + \tau_\alpha^{(z)} \sigma_k^{(z)}}{2} \right) + b_{\alpha k} \left(\frac{1 - \tau_\alpha^{(z)} \sigma_k^{(z)}}{2} \right) + c_{\alpha k} \left(\tau_\alpha^{(-)} \sigma_k^{(+)} + \tau_\alpha^{(+)} \sigma_k^{(-)} \right), \quad (5.6)$$

dove $\tau_\alpha^{(z)}$ e $\sigma_k^{(z)}$ sono matrici di Pauli definite, rispettivamente, su \mathcal{V}_α e su \mathcal{H}_k . La parametrizzazione (5.3)-(5.5) implica

$$\Delta = \cos 2\eta. \quad (5.7)$$

Consideriamo la generica componente $(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{b_{\alpha k} b'_{\alpha k}}^{a_{\alpha k} a'_{\alpha k}}$, con gli indici che possono assumere valore 0 o 1, e osserviamo che le componenti non nulle sono:

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{00}^{00} = a(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (5.8)$$

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{11}^{00} = b(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (5.9)$$

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{00}^{11} = b(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (5.10)$$

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{11}^{11} = a(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (5.11)$$

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{10}^{01} = c(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad (5.12)$$

$$(L_{\alpha k}(\lambda_\alpha, \nu_k))_{01}^{10} = c(\lambda_\alpha, \nu_k). \quad (5.13)$$

Assegniamo, secondo la figura 4.3, i quattro indici ai quattro spigoli che circondano il vertice (α, k) ; se associamo, al valore 0 di uno degli indici, un segmento vuoto sullo spigolo corrispondente e, al valore 1, un segmento pieno, le sei componenti non nulle di $L_{\alpha k}$ corrispondono alle sei configurazioni di vertice mostrate in figura 4.1. Possiamo quindi attribuire alle funzioni $a_{\alpha k}$, $b_{\alpha k}$ e $c_{\alpha k}$ il significato di pesi statistici del modello a sei vertici. Questo stabilisce che il modello fondamentale a vertici relativo alla matrice R trigonometrica è il modello a sei vertici che, pertanto, corrisponde, secondo la dualità illustrata nel capitolo 4, alla catena XXZ di spin $\frac{1}{2}$.

Questo modello esibisce la cosiddetta *simmetria di crossing*, ovvero la simmetria dei pesi di Boltzmann sotto riflessione di ogni configurazione di vertice rispetto alla linea orizzontale (verticale), invertendo i valori delle variabili di spin sugli spigoli verticali (orizzontali) e scambiando a con b . Se, ad esempio, consideriamo la riflessione rispetto alla linea verticale, possiamo scrivere,

$$(L(\lambda - \nu))_{bb'}^{aa'} = (L(\pi - (\lambda - \nu)))_{bb'}^{\bar{a}'\bar{a}}, \quad (5.14)$$

dove gli indici barrati significano l'inversione della variabile di spin sul corrispondente spigolo (ad esempio, se $a = 1$, $\bar{a} = 0$). Si può scrivere una condizione simile anche per la riflessione rispetto alla linea verticale.

Un'altra utile proprietà dei pesi statistici è

$$(L(\lambda - \nu))_{\bar{b}\bar{b}'}^{aa'} = (L(\lambda - \nu))_{aa'}^{bb'} = (L(\lambda - \nu))_{a'a}^{b'b}, \quad (5.15)$$

che esprime l'invarianza sotto riflessione rispetto ad una delle diagonali.

5.2 Funzione di partizione

Imponiamo le condizioni al contorno a parete di dominio, ovvero fissiamo

$$u_1 = \cdots = u_N = 1, \quad d_1 = \cdots = d_N = 0, \quad (5.16)$$

$$l_1 = \cdots = l_N = 1, \quad r_1 = \cdots = r_N = 0. \quad (5.17)$$

Per fissare le variabili di spin sugli spigoli esterni, consideriamo l'equivalente di (4.68) per questo modello e proiettiamola sugli opportuni vettori di \mathcal{V} e \mathcal{H} : se associamo l'indice 0 degli operatori definiti su questi spazi alla direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di \mathbb{C}^2 e l'indice 1 alla direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la funzione di partizione che ne risulta è

$$Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \left(\prod_{\alpha, k=1}^N \alpha \langle \uparrow | k \langle \downarrow | \right) T_N(\lambda_M, \{\nu\}) T_{N-1}(\lambda_{N-1}, \{\nu\}) \cdots \\ \cdots T_1(\lambda_1, \{\nu\}) \left(\prod_{\beta, l=1}^N | \downarrow \rangle_{\beta} | \uparrow \rangle_l \right). \quad (5.18)$$

Indichiamo gli elementi della matrice di monodromia verticale relativa alla linea verticale α con

$$T_{\alpha}(\lambda_{\alpha}) = \begin{pmatrix} A(\lambda_{\alpha}) & B(\lambda_{\alpha}) \\ C(\lambda_{\alpha}) & D(\lambda_{\alpha}) \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

dove, per costruzione, gli elementi di questa matrice sono operatori sullo spazio \mathcal{H} . Poiché vale,

$$\alpha \langle \uparrow | T_{\alpha}(\lambda_{\alpha}) | \downarrow \rangle_{\alpha} = B(\lambda_{\alpha}), \quad (5.20)$$

la funzione di partizione può essere scritta come [47]

$$Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \left(\prod_{k=1}^N k \langle \downarrow | \right) \prod_{\alpha=1}^N B(\lambda_{\alpha}) \left(\prod_{l=1}^N | \uparrow \rangle_l \right). \quad (5.21)$$

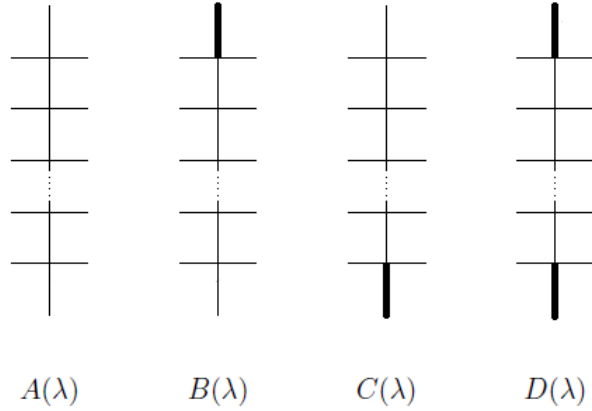


Figura 5.1: Corrispondenza tra le componenti operatoriali della matrice di monodromia verticale e le linee verticali del reticolo con diversi valori delle variabili di spin sugli spigoli verticali esterni.

In virtù di (4.78), l'ordine degli operatori B nell'espressione precedente è irrilevante; pertanto, la funzione di partizione del modello con DWBC è simmetrica rispetto allo scambio dei parametri spettrali λ_α . Scambiando le righe con le colonne è facile vedere che $Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\})$ è simmetrica anche rispetto allo scambio dei parametri spettrali ν_k .

Osserviamo che nella relazione (5.21) possiamo associare, ad ogni linea verticale, un operatore B dipendente dal corrispondente parametro spettrale. Più in generale, nell'espressione delle funzioni di correlazione del modello con condizioni al contorno fisse, possiamo tenere conto del contributo di una linea verticale tramite una delle quattro componenti di (5.19). L'operatore che associamo alla linea verticale α -esima dipende dal valore delle variabili di spin nello spazio \mathcal{V}_α , ossia sui due spigoli verticali esterni: se, ad esempio, abbiamo un segmento pieno sia sullo spigolo superiore che sullo spigolo inferiore, il contributo della linea verticale sarà dato da un operatore D (dal momento che dovremo valutare l'elemento $(1, 1)$ della matrice di monodromia verticale). Corrispondentemente, si associano le altre tre componenti ad altrettante possibili condizioni al contorno delle linee verticali (figura 5.1).

Grazie al formalismo del *Bethe ansatz* algebrico, è stata ottenuta una rappresentazione esatta per la funzione di partizione; per il modello non omogeneo, si ha [61]

$$Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \frac{\prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^N a(\lambda_\alpha, \nu_k) b(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{1 \leq j < k \leq N} d(\nu_j, \nu_k)} \det \mathcal{M}, \quad (5.22)$$

dove

$$\mathcal{M}_{\alpha k} = \varphi(\lambda_\alpha, \nu_k), \quad \varphi(\lambda, \nu) = \frac{c}{a(\lambda, \nu)b(\lambda, \nu)}, \quad (5.23)$$

mentre la funzione d è definita da $d(\lambda, \lambda') := \sin(\lambda - \lambda')$. La (5.22) è nota come formula di Izergin-Korepin. In appendice A è riportata una possibile derivazione di questa rappresentazione.

Per ottenere la funzione di partizione per il modello omogeneo, dobbiamo imporre

$$\lambda_\alpha = \lambda, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad \nu_k = \nu, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.24)$$

Dal momento che i pesi statistici (5.3)-(5.5) dipendono esclusivamente da differenze di parametri spettrali, non c'è alcuna perdita di generalità nello scegliere $\nu = 0$. Si dimostra che [62]

$$Z_N = \frac{[\sin(\lambda - \eta) \sin(\lambda + \eta)]^{N^2}}{\prod_{n=1}^{N-1} (n!)^2} \det \mathcal{N}, \quad (5.25)$$

con

$$\mathcal{N}_{\alpha k} = \partial_\lambda^{\alpha+k-2} \varphi(\lambda), \quad \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda, 0). \quad (5.26)$$

Maggiori dettagli sulla procedura di limite omogeneo sono forniti nell'appendice B.

5.3 Probabilità di formazione di regioni vuote

Introduciamo una particolare funzione di correlazione, detta *probabilità di formazione di regioni vuote* (che abbrevieremo con l'acronimo inglese EFP, *Emptiness Formation Probability*). Se definiamo colonna r -esima l'insieme degli spigoli orizzontali compresi tra la r -esima e la $r+1$ -esima linea verticale, la EFP descrive la probabilità di avere un set di spigoli consecutivi lungo una data colonna e a partire dalla prima linea orizzontale, tutti nello stato 1. Alcune rappresentazioni esatte della EFP sono state ricavate in [65]; in particolare, ci soffermeremo sulla rappresentazione, ottenuta nel limite omogeneo, in termini di integrali multipli nel piano complesso. Questa funzione di correlazione ha permesso di affrontare il calcolo dell'espressione esplicita della curva artica del modello [18].

Indichiamo con $F_N^{(r,s)}$ la probabilità di avere segmenti pieni sui primi s spigoli della colonna r -esima. Chiamando e_1, \dots, e_s i suddetti spigoli, tale

funzione di correlazione può essere scritta come

$$F_N^{(r,s)} = \sum_S P(S) \prod_{j=1}^s \chi_{e_j}(S), \quad (5.27)$$

dove $\chi_{e_j}(S)$ e $P(S)$ sono definiti, rispettivamente, in (2.10) e (2.11). Nel formalismo del *Bethe ansatz* algebrico, si ha

$$\begin{aligned} F_N^{(r,s)}(\{\lambda\}, \{\nu\}) &= \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^N \langle k | \downarrow \right) B(\lambda_N) \dots B(\lambda_{r+1}) p_1 \dots p_s B(\lambda_r) \dots B(\lambda_1) \left(\prod_{l=1}^N | \uparrow \rangle_l \right)}{Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\})}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

dove con p_j , $j = 1, \dots, s$, indichiamo i proiettori locali di spin (che corrispondono a fissare i segmenti pieni sugli spigoli scelti),

$$p_j = \frac{1 - \sigma_j^{(z)}}{2}. \quad (5.29)$$

Introduciamo alcune notazioni e alcune quantità utili per scrivere l'espressione esplicita della EFP e delle altre funzioni di correlazione.

Per le DWBC e la *ice rule*, in ogni stato, nella prima linea orizzontale vi è una e una sola configurazione di vertice di tipo 6: indichiamo con $H_N^{(r)}$ la probabilità che questa si trovi in corrispondenza della r -esima linea verticale. La $H_N^{(r)}$ è stata definita in [63], dove ne è stata anche fornita una rappresentazione determinantale. Definiamo poi la funzione generatrice,

$$h_N(z) := \sum_{r=1}^N H_N^{(r)} z^{r-1} \quad (5.30)$$

e introduciamo le funzioni $h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)$, definite da

$$h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) := \frac{\det_{1 \leq j, k \leq s} \left\{ z_k^{s-j} (z_k - 1)^{j-1} h_{N-s+j}(z_k) \right\}}{\Delta_s(\vec{z})}, \quad (5.31)$$

dove abbiamo utilizzato la notazione per il determinante di Vandermonde,

$$\Delta_s(\vec{z}) := \prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j). \quad (5.32)$$

Si verifica facilmente che le funzioni (5.31) sono polinomi di grado $N - 1$, simmetrici rispetto allo scambio delle variabili z_1, \dots, z_s . Detti a e b i valori

dei pesi statistici, calcolati in corrispondenza dei parametri spettrali λ e $\nu = 0$, definiamo

$$t := \frac{b}{a} = \frac{\sin(\lambda - \eta)}{\sin(\lambda + \eta)} \quad (5.33)$$

e

$$u(z) := \frac{1 - z}{(t^2 - 2\Delta t)z + 1}. \quad (5.34)$$

Si trova che, per il modello omogeneo, vale la rappresentazione integrale [65],

$$F_N^{(r,s)} = (-1)^s \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^{s-j}}{z_j^r (z_j - 1)^{s-j+1}} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{z_j - z_k}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \times h_{N,s}(z_1, \dots, z_s), \quad (5.35)$$

dove abbiamo indicato con C_0 un contorno nel piano complesso che circonda l'origine e nessun'altra singolarità delle funzioni integrande. Simmetrizzando l'integrando rispetto alle variabili z_1, \dots, z_s tramite la relazione [69],

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\{z_j\}} \left[\prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1](t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1)}{z_j - 1} \right] &= \\ &= \frac{Z_s}{a^{s(s-1)} c^s} \prod_{j=1}^s \frac{[(t^2 - 2\Delta t)z_j + 1]^{s-1}}{(z_j - 1)^{s-1}} \Delta_s(\vec{z}) h_{s,s}(u(z_1), \dots, u(z_s)), \end{aligned} \quad (5.36)$$

si ha

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{\frac{s(s+1)}{2}}}{s!} \frac{Z_s(\lambda)}{c^s a^{s(s-1)}} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \frac{\prod_{j=1}^s [1 + (t^2 - 2\Delta t)z_j]^{s-1}}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s (t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1)} \times \\ \times [\Delta_s(\vec{z})]^2 \frac{h_{s,s}(u(z_1), \dots, u(z_s)) h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)}{\prod_{j=1}^s (z_j - 1)^s z_j^r}. \quad (5.37)$$

Si noti che la convenzione usata per l'antisimmetrizzazione è

$$\mathcal{A}_{\{z_j\}} f(z_1, \dots, z_s) := \sum_{P \in S_s} (-1)^{|P|} f(z_{P_1}, \dots, z_{P_s}). \quad (5.38)$$

Il calcolo di questa particolare funzione di correlazione è motivato dalla sua applicazione allo studio della curva artica del modello. Infatti, a causa delle DWBC e della *ice rule*, si può vedere che la EFP misura la probabilità che tutte le configurazioni di vertice nel sottoreticolo $(N - r) \times s$, posto nell'angolo in alto a sinistra del reticolo $N \times N$, siano del tipo 2.

Il legame con la curva artica deriva dal fatto che la EFP misura la probabilità di ordine ferroelettrico in una certa regione e che, nel limite di *scaling*, vale 1 quando r e s si trovano nella regione ordinata e 0 quando si trovano in quella disordinata: si ha quindi un gradino da 0 a 1 proprio in corrispondenza della curva artica. In [18], è stata calcolata un'espressione esplicita per la curva artica del modello, per generici valori del parametro Δ compresi tra -1 e 1 . I risultati trovati sono in accordo con le simulazioni numeriche. Inoltre, nel caso $\Delta = 0$, si ritrova esattamente la curva artica della tassellatura con i domino con distribuzione uniforme del diamante azteco, come ci aspettiamo, data la corrispondenza illustrata nella sezione 2.6.

Il nome *Emptiness Formation Probability* è preso in prestito da una quantità simile definita nel contesto delle catene di spin. Tuttavia, dato che questa misura la probabilità di trovare, in una certa regione del reticolo, tutti i segmenti pieni, una denominazione più adeguata potrebbe essere *Fullness Formation Probability*. Ad ogni modo, seguiremo la tradizione e continueremo a parlare di EFP.

5.4 Probabilità di configurazione di riga

Il calcolo delle funzioni di correlazione del modello lontano dai bordi del reticolo risulta particolarmente difficile: l'unico esempio al momento noto è quello della EFP.

Per costruire funzioni di correlazione che forniscano più informazioni sul comportamento del sistema nel limite di *scaling*, introduciamo una quantità, detta *probabilità di configurazione di riga* (che abbrevieremo con l'acronimo RCP, *Row Configuration Probability*). Questa è definita come la probabilità di avere i segmenti vuoti sulla s -esima riga, in posizione $r_1 < r_2 < \dots < r_s$. La probabilità di configurazione di riga può essere usata come punto di partenza per il calcolo di altre funzioni di correlazione, come la EFP e la funzione di correlazione ad un punto.

Dividiamo il reticolo $N \times N$ con DWBC in due parti, in modo che la porzione superiore abbia s linee orizzontali e N linee verticali. Osserviamo che, a causa della *ice rule* e delle DWBC, sulla s -esima riga, avremo necessariamente s segmenti vuoti. Definiamo $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ come la funzione di partizione sulla porzione superiore di reticolo in cui i segmenti vuoti sul bordo inferiore si trovino in posizione $r_1 < \dots < r_s$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$ come quella relativa alla porzione inferiore di reticolo con i segmenti vuoti sul bordo superiore in posizione $r_1 < \dots < r_s$ (figura 5.2).

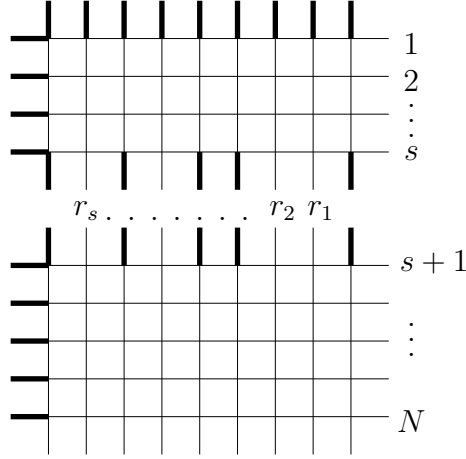


Figura 5.2: Le due porzioni di reticolo, con le condizioni al contorno che abbiamo scelto, su cui vogliamo calcolare le funzioni di partizione $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$.

La probabilità di configurazione di riga, indicata con $H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}$, può essere scritta come

$$H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)} = \frac{Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}}{Z_N}. \quad (5.39)$$

Come vedremo anche in altri esempi, $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$ possono essere visti come blocchi elementari con cui costruire funzioni di correlazioni più complesse, per esempio sommando su un sottoinsieme degli indici r_1, \dots, r_s .

5.5 Calcolo di $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$

5.5.1 Rappresentazione in termini di polinomi ortogonali

Calcoliamo la funzione di partizione relativa alla porzione di reticolo superiore. Dato il set di indici corrispondenti alle posizioni dei segmenti vuoti sulla s -esima riga, $\{r_1, r_2, \dots, r_s\}$, introduciamo il set degli indici complementari, $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_{N-s}\} = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_s\}$, tali che $\bar{r}_1 < \bar{r}_2 < \dots < \bar{r}_{N-s}$.

Nel formalismo del *Bethe ansatz* algebrico, si ottiene la seguente scrittura,

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) = \langle \Downarrow | \left(\prod_{\alpha=\bar{r}_{N-s}+1}^N B(\lambda_\alpha) \right) D(\lambda_{\bar{r}_{N-s}}) \left(\prod_{\alpha=\bar{r}_{N-s-1}+1}^{\bar{r}_{N-s}-1} B(\lambda_\alpha) \right) \dots \dots D(\lambda_{\bar{r}_1}) \left(\prod_{\alpha=1}^{\bar{r}_1-1} B(\lambda_\alpha) \right) | \Uparrow \rangle, \quad (5.40)$$

dove abbiamo introdotto la notazione compatta,

$$| \Uparrow \rangle := \left(\prod_{l=1}^N | \uparrow \rangle_l \right), \quad | \Downarrow \rangle := \left(\prod_{l=1}^N | \downarrow \rangle_l \right), \quad (5.41)$$

e quella secondo cui si indica con $\{x\}_k$ un set di k variabili x_1, \dots, x_k . Grazie a (4.110), procedendo ripetutamente come nella dimostrazione del teorema in sezione 5.1, si verifica l'identità

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) &= \\ &= \sum_{\substack{\bar{\alpha}_1=1 \\ \bar{\alpha}_2 \neq \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_1} \sum_{\substack{\bar{\alpha}_2=1 \\ \bar{\alpha}_2 \neq \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_2} \dots \sum_{\substack{\bar{\alpha}_{N-s}=1 \\ \bar{\alpha}_{N-s} \neq \bar{\alpha}_{N-s-1}, \dots, \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_{N-s}} \prod_{\substack{\bar{\beta}_1=1 \\ \bar{\beta}_1 \neq \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_1} f(\lambda_{\bar{\beta}_1}, \lambda_{\bar{\alpha}_1}) \dots \prod_{\substack{\bar{\beta}_{N-s}=1 \\ \bar{\beta}_{N-s} \neq \bar{\alpha}_{N-s}, \dots, \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_{N-s}} f(\lambda_{\bar{\beta}_{N-s}}, \lambda_{\bar{\alpha}_{N-s}}) \\ &\prod_{\gamma=1}^s \frac{g(\lambda_{\bar{r}_\gamma}, \lambda_{\bar{\alpha}_\gamma})}{f(\lambda_{\bar{r}_\gamma}, \lambda_{\bar{\alpha}_\gamma})} \prod_{j=1}^{N-s} \prod_{k=1}^s b(\lambda_{\bar{\alpha}_j}, \nu_k) Z_s(\lambda_\alpha \neq \lambda_{\bar{\alpha}_1}, \dots, \lambda_{\bar{\alpha}_{N-s}}; \nu_1, \dots, \nu_s). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Introduciamo la funzione

$$e(\lambda, \lambda') := \sin(\lambda - \lambda' + 2\eta). \quad (5.43)$$

Da (5.42) e (5.22), si ottiene

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) &= \frac{\prod_{k=1}^s \prod_{\alpha=1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_k) a(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) \prod_{1 \leq j < k \leq s} d(\nu_j, \nu_k)} \\ &\sum_{\substack{\bar{\alpha}_1=1 \\ \bar{\alpha}_2 \neq \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_1} \sum_{\substack{\bar{\alpha}_2=1 \\ \bar{\alpha}_2 \neq \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_2} \dots \sum_{\substack{\bar{\alpha}_{N-s}=1 \\ \bar{\alpha}_{N-s} \neq \bar{\alpha}_{N-s-1}, \dots, \bar{\alpha}_1}}^{\bar{r}_{N-s}} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{N-s} N - \bar{\alpha}_j - \sum_{1 \leq j < k \leq N-s} \Theta(\bar{\alpha}_j - \bar{\alpha}_k)}}{\prod_{1 \leq j < k \leq N-s} e(\lambda_{\bar{\alpha}_k}, \lambda_{\bar{\alpha}_j})} \\ &\left(\prod_{j=1}^{N-s} U_{\bar{r}_j}(\lambda_{\bar{\alpha}_j}) \right) \det_s \mathcal{M}(\{\lambda_\alpha\} \forall \alpha \neq \bar{\alpha}_k; \nu_1, \dots, \nu_s), \end{aligned} \quad (5.44)$$

con

$$U_{\bar{r}_j}(\lambda_{\bar{\alpha}_j}) = \frac{\prod_{\bar{\beta}_j=\bar{r}_j+1}^N d(\lambda_{\bar{\alpha}_j}, \lambda_{\bar{\beta}_j}) \prod_{\bar{\beta}_j=1}^{\bar{r}_j-1} e(\lambda_{\bar{\alpha}_j}, \lambda_{\bar{\beta}_j})}{\prod_{k=1}^s a(\lambda_{\bar{\alpha}_j}, \nu_k)}. \quad (5.45)$$

Dato che $U_{\bar{r}_j}(\lambda_\alpha) = 0$ se $\alpha = \bar{r}_j + 1, \dots, N$, posso estendere le sommatorie in (5.44) fino a N , in modo che sia possibile riconoscerci uno sviluppo di Laplace per un determinante $N \times N$. Se poniamo $\lambda_{\bar{\alpha}_j} = \lambda + \xi_{\bar{\alpha}_j}$ e osserviamo che, data una generica funzione F regolare in λ , vale

$$F(\lambda + \xi) = \exp(\xi \partial_\epsilon) F(\lambda + \epsilon) \Big|_{\epsilon=0}, \quad (5.46)$$

possiamo scrivere

$$\frac{\prod_{j=1}^{N-s} U_{\bar{r}_j}(\lambda_{\bar{\alpha}_j})}{\prod_{1 \leq j < k \leq N-s} e(\lambda_{\bar{\alpha}_k}, \lambda_{\bar{\alpha}_j})} = \prod_{j=1}^{N-s} \exp(\xi_{\bar{\alpha}_j} \partial_{\epsilon_{N+1-j}}) \frac{\prod_{j=1}^{N-s} U_{\bar{r}_j}(\lambda + \epsilon_{N+1-j})}{\prod_{1 \leq j < k \leq N-s} e(\lambda + \epsilon_{N+1-j}, \lambda + \epsilon_{N+1-k})} \Big|_{\epsilon_j=0}. \quad (5.47)$$

Ricostruendo il determinante $N \times N$, si ottiene

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) &= \frac{\prod_{k=1}^s \prod_{\alpha=1}^N b(\lambda_\alpha, \nu_k) a(\lambda_\alpha, \nu_k)}{\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta, \lambda_\alpha) d(\nu_\alpha, \nu_\beta)} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \varphi(\lambda_1, \nu_1) & \dots & \varphi(\lambda_1, \nu_s) & \exp(\xi_1 \partial_{\epsilon_{s+1}}) & \dots & \exp(\xi_1 \partial_{\epsilon_N}) \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \varphi(\lambda_N, \nu_1) & \dots & \varphi(\lambda_N, \nu_s) & \exp(\xi_N \partial_{\epsilon_{s+1}}) & \dots & \exp(\xi_N \partial_{\epsilon_N}) \end{vmatrix} \\ &\times \frac{\prod_{j=1}^{N-s} U_{\bar{r}_j}(\lambda + \epsilon_{N+1-j})}{\prod_{1 \leq j < k \leq N-s} e(\lambda + \epsilon_{N+1-j}, \lambda + \epsilon_{N+1-k})} \Big|_{\epsilon_{s+1}=\dots=\epsilon_N=0}. \quad (5.48) \end{aligned}$$

Limite omogeneo e rappresentazione in polinomi ortogonali. Per ottenere il limite omogeneo, dobbiamo effettuare i limiti, $\nu_1, \dots, \nu_s \rightarrow 0$ e $\xi_{s+1}, \dots, \xi_N \rightarrow 0$ in questo ordine. Seguendo la procedura riportata in appendice B, otteniamo

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} &= \frac{(ab)^{Ns}}{\prod_{k=1}^{N-1} k! \prod_{j=1}^{s-1} j!} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{s-1} \varphi(\lambda) & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \partial_\lambda^{N-1} \varphi(\lambda) & \dots & \partial_\lambda^{N-2+s} \varphi(\lambda) & \partial_{\epsilon_{s+1}}^{N-1} & \dots & \partial_{\epsilon_N}^{N-1} \end{vmatrix} \\ &\prod_{j=1}^{N-s} \frac{[\sin(\epsilon_{N+1-j})]^{N-\bar{r}_j} [\sin(\epsilon_{N+1-j} - 2\eta)]^{\bar{r}_j-1}}{[\sin(\lambda + \epsilon_{N+1-j} + \eta)]^s} \\ &\prod_{1 \leq j < k \leq N-s} \frac{1}{\sin(\epsilon_{N+1-j} - \epsilon_{N+1-k} + 2\eta)} \Big|_{\{\epsilon_j\}=0}. \quad (5.49) \end{aligned}$$

Al fine di rappresentare $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ tramite integrali multipli, introduciamo una rappresentazione ausiliare in termini di polinomi ortogonali (alcune proprietà dei polinomi ortogonali sono riportate in appendice C). Un polinomio in una sola variabile si dice monico se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale a 1. Consideriamo il set di polinomi monici $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ed una funzione peso $\mu(x)$, con supporto $\Sigma \subset \mathbb{R}$, tali che

$$\int_{\Sigma} P_n(x)P_m(x)\mu(x)dx = h_n\delta_{n,m}, \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.50)$$

Definiamo il momento n -esimo del peso $\mu(x)$ come

$$c_n = \int_{\Sigma} x^n \mu(x)dx, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.51)$$

Per qualunque set di polinomi ortogonali monici, vale la seguente identità:

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-s-1} & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & & \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & & \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & & \\ c_{N-1} & c_N & \dots & c_{2N-s-2} & x_1^{N-1} & \dots & x_s^{N-1} \end{vmatrix} = h_0 h_1 \dots h_{N-s-1} \det_{1 \leq j, k \leq s} \{P_{N-s+j-1}(x_k)\}. \quad (5.52)$$

Ponendo, nel caso in esame, $c_n := \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \varphi(\lambda)$, introduciamo, tramite la (5.52), un set opportuno di polinomi monici $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ nell'espressione (5.49). Definendo le seguenti quantità,

$$K_n(x) = \frac{n! \varphi^{n+1}(\lambda)}{h_n} P_n(x), \quad (5.53)$$

$$\omega(\epsilon) = \frac{a \sin(\epsilon)}{b \sin(\epsilon - 2\eta)}, \quad \tilde{\omega}(\epsilon) = \frac{b \sin(\epsilon)}{a \sin(\epsilon + 2\eta)}, \quad (5.54)$$

e osservando che

$$\frac{\sin(\epsilon_k + \lambda + \eta) \sin(\epsilon_j + \lambda - \eta)}{\sin(\epsilon_k - \epsilon_j + 2\eta)} = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \frac{(1 - \tilde{\omega}(\epsilon_k))(\omega(\epsilon_j) - 1)}{\tilde{\omega}(\epsilon_k)\omega(\epsilon_j) - 1}, \quad (5.55)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} &= \frac{Z_N \prod_{j=1}^{N-s} t^{\bar{r}_j}}{c^{N-s} a^{\frac{(N-s)(N-s-3)}{2}} b^{\frac{(N-s)(N+s+1)}{2}}} \times \\
&\times \begin{vmatrix} K_s(\partial_{\epsilon_{s+1}}) & \dots & K_s(\partial_{\epsilon_N}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N-1}(\partial_{\epsilon_{s+1}}) & \dots & K_{N-1}(\partial_{\epsilon_N}) \end{vmatrix} \prod_{1 \leq j < k \leq N-s} \frac{1}{\tilde{\omega}(\epsilon_{N+1-j}) \omega(\epsilon_{N+1-k}) - 1} \times \\
&\times \prod_{j=1}^{N-s} \frac{[\omega(\epsilon_{N+1-j})]^{N-s-j} [\tilde{\omega}(\epsilon_{N+1-j})]^{s+j-\bar{r}_j}}{(\tilde{\omega}(\epsilon_{N+1-j}) - 1)^s} \Big|_{\epsilon_{s+1}=\dots=\epsilon_N=0}, \quad (5.56)
\end{aligned}$$

dove t è definito in (5.33).

Rappresentazione integrale. Con riferimento a [65], data una funzione F qualunque, si può provare l'identità

$$K_{N-1}(\partial_\epsilon) F(\tilde{\omega}(\epsilon)) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{(z-1)^{N-1}}{z^N} \tilde{h}_N(z) F(z) dz, \quad (5.57)$$

dove C_0 è un contorno d'integrazione sul piano complesso che circonda l'origine (e nessuna altra singolarità della funzione integranda) e \tilde{h}_N è legata alla funzione definita in (5.30) dalla relazione

$$\tilde{h}_N(z) = z^{N-1} h_N\left(\frac{1}{z}\right). \quad (5.58)$$

Introduciamo, inoltre,

$$\tilde{h}_{N,s}(z_1, \dots, z_s) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq s} \{z_k^{s-j} (z_k - 1)^{j-1} \tilde{h}_{N-s+j}(z_k)\}}{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j)} \quad (5.59)$$

e riesprimiamo la relazione tra ω e $\tilde{\omega}$ in termini di t e Δ ,

$$\tilde{\omega}(\epsilon) = \frac{t^2 \omega(\epsilon)}{2\Delta t \omega(\epsilon) - 1}. \quad (5.60)$$

Dopo semplici calcoli, si giunge a

$$\begin{aligned}
Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} &= \frac{Z_N \prod_{j=1}^{N-s} \tilde{t}^{j-\bar{r}_j}}{c^{N-s} b^{(N-s)(N-1)}} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^{N-s} z}{(2\pi i)^{N-s}} \prod_{j=1}^{N-s} \frac{1}{z_j^{\bar{r}_j}} \\
&\prod_{1 \leq j < k \leq N-s} \frac{z_k - z_j}{\tilde{t}^2 z_k z_j - 2\Delta \tilde{t} z_j + 1} \tilde{h}_{N,N-s}(z_1 \dots z_{N-s}), \quad (5.61)
\end{aligned}$$

con $\tilde{t} = \frac{1}{t}$.

Funzione di partizione per la porzione inferiore del reticolo. Per ottenere la funzione di partizione relativa alla parte inferiore del reticolo, possiamo sfruttare le simmetrie del sistema. Si osserva, infatti, che le due porzioni di reticolo studiate sono legate l'una all'altra da una trasformazione di *crossing*. Per eseguire questa trasformazione sulla formula (5.61), dobbiamo scambiare a con b e, di conseguenza, \tilde{t} con t . Inoltre, dalle definizioni (5.54), si vede che lo scambio di a e b implica quello di ω e $\tilde{\omega}$, con il conseguente scambio di $\tilde{h}(z)$ e $h(z)$. Infine, è necessario lo scambio di $N - s$ con s e, dato che, tramite questa trasformazione, i segmenti vuoti diventano pieni e viceversa, di \bar{r}_j con r_j . Così facendo, si ha

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot} = \frac{Z_N \prod_{j=1}^s t^{j-r_j}}{c^s a^{s(N-1)}} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{1}{z_j^{r_j}} \times \\ \times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{z_k - z_j}{t^2 z_k z_j - 2\Delta t z_j + 1} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s). \quad (5.62)$$

Osserviamo che questa rappresentazione può essere ottenuta anche a partire da

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}(\{\lambda\}_N, \{\nu_j\}_{j=s+1}^N) = \langle \Downarrow | \left(\prod_{\alpha=r_s+1}^N B(\lambda_\alpha) \right) A(\lambda_{r_s}) \left(\prod_{\alpha=r_{s-1}+1}^{r_s-1} B(\lambda_\alpha) \right) \dots \\ \dots A(\lambda_{r_1}) \left(\prod_{\alpha=1}^{r_1-1} B(\lambda_\alpha) \right) | \Uparrow \rangle, \quad (5.63)$$

procedendo come illustrato in questa sezione [66].

5.5.2 Un'altra rappresentazione per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$

La ricerca di nuove rappresentazioni per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$ è motivata dal fatto che le due precedentemente ottenute, collegate tra loro da una trasformazione di *crossing*, dipendono da due diversi set di indici e non è pertanto chiaro come combinarle, effettuando le somme su un sottoinsieme di tali indici, in modo da ottenere altre funzioni di correlazione. Per ottenere una differente rappresentazione per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$, riscriviamo (5.40) come

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) = \langle \Downarrow | \left(\prod_{j=r_s+1}^N D(\lambda_j) \right) B(\lambda_{r_s}) \left(\prod_{j=r_{s-1}+1}^{r_s-1} D(\lambda_j) \right) \dots \\ \dots B(\lambda_{r_1}) \left(\prod_{j=1}^{r_1-1} D(\lambda_j) \right) | \Uparrow \rangle. \quad (5.64)$$

Per spostare gli operatori D in modo tale da farli agire diagonalmente su $\langle \Downarrow |$, usiamo la relazione

$$B(\lambda_{r_1}) \prod_{j=1}^{r_1-1} D(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{r_1} \frac{g(\lambda_{r_1}, \lambda_k)}{f(\lambda_{r_1}, \lambda_k)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r_1} f(\lambda_j, \lambda_k) D(\lambda_j) \right) B(\lambda_k), \quad (5.65)$$

che possiamo dimostrare, utilizzando l'algebra di Yang-Baxter e procedendo come per la (4.110). Si ottiene

$$\begin{aligned} Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) &= \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^s a(\lambda_\alpha, \nu_k) \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_{s-1}=1 \\ \alpha_{s-1} \neq \alpha_s}}^{r_s} \sum_{\substack{\alpha_{s-1}=1 \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_s}}^{r_{s-1}} \dots \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_s}}^{r_1} \prod_{\substack{\beta_1=1 \\ \beta_1 \neq \alpha_1}}^{r_1} \frac{1}{d(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_1})} \dots \\ &\dots \prod_{\substack{\beta_s=1 \\ \beta_s \neq \alpha_s, \dots, \alpha_1}}^{r_s} \frac{1}{d(\lambda_{\alpha_s}, \lambda_{\beta_s})} \prod_{j=1}^s \frac{\prod_{\beta_j=1}^{r_j-1} e(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\beta_j})}{\prod_{k=1}^s a(\lambda_{\alpha_j}, \nu_k)} \frac{Z_s(\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s}; \nu_1, \dots, \nu_s)}{\prod_{1 \leq j < k \leq s} e(\lambda_{\alpha_k}, \lambda_{\alpha_j})}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Il passaggio chiave per ottenere la nuova rappresentazione integrale è interpretare le somme sugli s indici come somme su residui e dunque riscrivere $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ come s integrali sul piano complesso di un'opportuna funzione: come illustrato in appendice D, si ha che, data una generica funzione $F(z_1, \dots, z_s)$ di s variabili complesse,

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\lambda_{r_1}}} \frac{dz_1}{2\pi i} \dots \oint_{C_{\lambda_{r_s}}} \frac{dz_s}{2\pi i} F(z_1, \dots, z_s) \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} d(z_k, z_j)}{\prod_{j=1}^s \prod_{\beta_j=1}^{r_j} d(z_j, \lambda_{\beta_j})} &= \\ &= \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_{s-1}=1 \\ \alpha_{s-1} \neq \alpha_s}}^{r_s} \sum_{\substack{\alpha_{s-1}=1 \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_s}}^{r_{s-1}} \dots \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_s}}^{r_1} \frac{F(\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s})}{\prod_{j=1}^s \prod_{\substack{\beta_j=1 \\ \beta_j \neq \alpha_1, \dots, \alpha_j}}^{r_j} d(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\beta_j})}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

dove $C_{\lambda_{r_j}}$ è un cammino che circonda i soli poli $\{\lambda_1 \dots \lambda_{r_j}\}$. Se scegliamo

$$\begin{aligned} F(\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s}) &= \\ &= \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^s a(\lambda_\alpha, \nu_k) \prod_{j=1}^s \left(\frac{\prod_{\beta_j=1}^{r_j-1} e(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\beta_j})}{\prod_{k=1}^s a(\lambda_{\alpha_j}, \nu_k)} \right) \frac{Z_s(\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s}; \nu_1, \dots, \nu_s)}{\prod_{1 \leq j < k \leq s} e(\lambda_{\alpha_k}, \lambda_{\alpha_j})}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

usando (5.67), si ha

$$\begin{aligned}
Z_{top}^{r_1, \dots, r_s}(\{\lambda\}_N, \{\nu\}_s) &= \\
&= \prod_{\alpha=1}^N \prod_{k=1}^s a(\lambda_\alpha, \nu_k) \oint_{C_{\lambda_{r_1}}} \frac{dz_1}{2\pi i} \cdots \oint_{C_{\lambda_{r_s}}} \frac{dz_s}{2\pi i} \prod_{j=1}^s \frac{\prod_{\beta_j=1}^{r_j-1} e(z_j, \lambda_{\beta_j})}{\prod_{\beta_j=1}^{r_j} d(z_j, \lambda_{\beta_j})} \\
&\quad \frac{Z_s(z_1, \dots, z_s; \nu_1, \dots, \nu_s)}{\prod_{j,k=1}^s a(z_j, \nu_k)} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{d(z_k, z_j)}{e(z_k, z_j)}. \quad (5.69)
\end{aligned}$$

Limite omogeneo. Otteniamo il limite omogeneo ponendo $\nu_k = 0$, $k = 1, \dots, s$, e $\lambda_\alpha = \lambda$, $\alpha = 1, \dots, N$. Per comodità, effettuiamo la trasformazione sulla variabile di integrazione $z_j \rightarrow z_j + \lambda$ e ricordiamo la formula [65],

$$Z_s(\lambda + z_1, \dots, \lambda + z_s, 0, \dots, 0) = Z_s h_{s,s}(\gamma(z_1), \dots, \gamma(z_s)) \prod_{j=1}^s \frac{[a(\lambda + z_j)]^{s-1}}{[a(\lambda)]^{s-1}}, \quad (5.70)$$

dove $h_{s,s}$ è definita in (5.31), mentre

$$\gamma(z) = \frac{a(\lambda) b(\lambda + z)}{b(\lambda) a(\lambda + z)}. \quad (5.71)$$

Osserviamo che la funzione γ e la funzione u (definita in (5.34)) sono legate dalla seguente relazione,

$$u(\omega(z)) = \gamma(z). \quad (5.72)$$

Sostituendo (5.70) in (5.69) e chiamando $u_j = \gamma(z_j)$, con un po' di algebra, si giunge a

$$\begin{aligned}
Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} &= Z_s a^{s(N-s)} \prod_{j=1}^s t^{j-r_j} \oint_{C_1} \cdots \oint_{C_1} \frac{d^s u}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{(t^2 u_j - 2\Delta t + 1)^{r_j-1}}{(u_j - 1)^{r_j}} \\
&\quad \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{u_k - u_j}{t^2 u_j u_k - 2\Delta t u_j + 1} h_{s,s}(u_1, \dots, u_s), \quad (5.73)
\end{aligned}$$

dove C_1 è un cammino chiuso che circonda il punto $u_j = 1$ e nessun altro polo della funzione integranda.

Funzione di partizione per la porzione inferiore del reticolo. Effettuando le trasformazioni riportate nella sezione 5.5.1, si ottiene

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot} = Z_{N-s} b^{s(N-s)} \times \prod_{j=1}^{N-s} \tilde{t}^{j-\bar{r}_j} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^{N-s} u}{(2\pi i)^{N-s}} h_{N-s, N-s}(u_1, \dots, u_{N-s})$$

$$\prod_{j=1}^{N-s} \frac{(\tilde{t}^2 u_j - 2\Delta \tilde{t} + 1)^{\bar{r}_j - 1}}{(u_j - 1)^{\bar{r}_j}} \prod_{1 \leq j < k \leq N-s} \frac{u_k - u_j}{\tilde{t}^2 u_j u_k - 2\Delta \tilde{t} u_j + 1}, \quad (5.74)$$

rappresentazione relativa alla parte inferiore del reticolo corrispondente a (5.73).

5.5.3 Rappresentazione tipo "funzione d'onda"

Un'altra rappresentazione può essere ottenuta dall'equivalenza tra il *Bethe ansatz* algebrico e quello delle coordinate; a partire dal calcolo diretto per $s = 2$ e $s = 3$, si può facilmente estendere il risultato per valore di s generico.

Caso $s=2$. Calcoliamo Z_{r_1, r_2}^{top} e osserviamo che, per la *ice rule* e le DWBC, abbiamo sempre un solo segmento vuoto sulla prima riga, in posizione p tale che $r_1 \leq p \leq r_2$: chiamiamo $W_{N,2}(p; r_1, r_2)$ il peso statistico relativo a questo stato. Se $p \neq r_1, r_2$, si ha

$$W_{N,2}(p; r_1, r_2) = c_1 c_2^3 \frac{a_1^{N-1} a_2^N}{b_2^3} \left(\frac{b_2}{a_2} \right)^{r_1+r_2} \left(\frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} \right)^{p-1}, \quad (5.75)$$

mentre

$$W_{N,2}(r_1; r_1, r_2) = c_1 c_2 \frac{a_1^{N-1} a_2^{N+2}}{b_2^3} \left(\frac{b_2}{a_2} \right)^{r_1+r_2} \left(\frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} \right)^{r_1-1} \quad (5.76)$$

e

$$W_{N,2}(r_2; r_1, r_2) = c_1 c_2 \frac{a_1^{N-1} a_2^N}{b_2} \left(\frac{b_2}{a_2} \right)^{r_1+r_2} \left(\frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} \right)^{r_2-1}, \quad (5.77)$$

dove $a_j := a(\lambda, \nu_j)$, $b_j := b(\lambda, \nu_j)$ e $c_j := c(\lambda, \nu_j)$. Si noti dunque che stiamo considerando il reticolo omogeneo rispetto alle linee verticali, ma non rispetto a quelle orizzontali.

La funzione Z_{r_1, r_2}^{top} è data da

$$Z_{r_1, r_2}^{top}(\lambda, \nu_1, \nu_2) = \sum_{p=r_1}^{r_2} W_{N,2}(p; r_1, r_2). \quad (5.78)$$

Introduciamo $t_j := \frac{b_j}{a_j}$ e ricordiamo che possiamo scrivere la funzione d'onda di Bethe per due particelle come

$$\psi(r_1, r_2; t_1, t_2) = t_1^{r_1} t_2^{r_2} (1 + t_1 t_2 - 2\Delta t_1) - t_1^{r_2} t_2^{r_1} (1 + t_1 t_2 - 2\Delta t_2). \quad (5.79)$$

Con semplici passaggi, si giunge a

$$Z_{r_1, r_2}^{top}(\lambda, \nu_1, \nu_2) = \frac{c^2 (a_1 a_2)^{N-1}}{(t_2 - t_1) t_1 t_2} \psi(r_1, r_2; t_1, t_2), \quad (5.80)$$

dato che $c_1 = c_2 = c$.

Caso s=3 e s generico. Passiamo al calcolo di Z_{r_1, r_2, r_3}^{top} . Se chiamiamo p_1 e p_2 le posizioni dei segmenti vuoti nella seconda riga, per cui deve valere $r_1 \leq p_1 \leq r_2 \leq p_2 \leq r_3$, e chiamiamo $W_{N,3}(p_1, p_2; r_1, r_2, r_3)$ il peso statistico di questo stato, si ha

$$Z_{r_1, r_2, r_3}^{top}(\lambda, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = \sum_{p_1=r_1}^{r_2} \sum_{p_2=r_2}^{r_3} W_{N,3}(p_1, p_2; r_1, r_2, r_3). \quad (5.81)$$

Se $r_1 < p_1 < r_2 < p_2 < r_3$,

$$W_{N,3}(p_1, p_2; r_1, r_2, r_3) = Z_{top}^{p_1, p_2} \frac{c_3^5}{b_3^3} a_3^{N-2} t_3^{r_1+r_2+r_3-p_1-p_2} =: W^0(p_1, p_2; r_1, r_2, r_3). \quad (5.82)$$

A questi, aggiungiamo anche i casi particolari:

$$W_{N,3}(r_1, p_2; r_1, r_2, r_3) = W^0(r_1, p_2; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{a_3}{c_3} \right)^2, \quad (5.83)$$

$$W_{N,3}(r_2, p_2; r_1, r_2, r_3) = W^0(r_2, p_2; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{b_3}{c_3} \right)^2, \quad (5.84)$$

$$W_{N,3}(p_1, r_2; r_1, r_2, r_3) = W^0(p_1, r_2; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{a_3}{c_3} \right)^2, \quad (5.85)$$

$$W_{N,3}(p_1, r_3; r_1, r_2, r_3) = W^0(p_1, r_3; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{b_3}{c_3} \right)^2, \quad (5.86)$$

$$W_{N,3}(r_1, r_2; r_1, r_2, r_3) = W^0(r_1, r_2; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{a_3}{c_3} \right)^4, \quad (5.87)$$

$$W_{N,3}(r_2, r_3; r_1, r_2, r_3) = W^0(r_2, r_3; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{b_3}{c_3} \right)^4, \quad (5.88)$$

$$W_{N,3}(r_1, r_3; r_1, r_2, r_3) = W^0(r_1, r_3; r_1, r_2, r_3) \left(\frac{a_3 b_3}{c_3^2} \right)^2. \quad (5.89)$$

In (5.81), raccogliamo il fattore $(a_1 a_2 a_3)^{N-1} \frac{c^3}{a_3 b_3^3} \frac{t_3^{r_1+r_2+r_3}}{t_1 t_2 (t_2-t_1)}$ e valutiamo la rimanente somma.

Per semplicità, lavoriamo nel limite $c \rightarrow \infty$ (corrispondente a $\Leftrightarrow \Delta \rightarrow -\infty$); in tal caso, è sufficiente valutare il contributo dominante, che corrisponde al termine di ordine c^5 . Definiamo

$$\theta_{1,2} := 1 + t_1 t_2 - 2\Delta t_1, \quad \theta_{2,1} := 1 + t_1 t_2 - 2\Delta t_2 \quad (5.90)$$

e osserviamo che, nel limite in cui ci poniamo, $c^2 \simeq -2\Delta ab$ e $-2\Delta t_i \simeq \theta_{i,j}$. Con un po' di algebra, è possibile riconoscere in (5.81) la funzione d'onda,

$$\psi(r_1, r_2, r_3; t_1, t_2, t_3) := \sum_{P \in S_3} (-1)^{|P|} \prod_{j=1}^3 t_{P(j)}^{r_j} \prod_{1 \leq j < k \leq 3} \theta_{P(j), P(k)}, \quad (5.91)$$

e giungere così a

$$Z_{r_1, r_2, r_3}^{top}(\lambda, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = c^3 \prod_{j=1}^3 \frac{a_j^{N-1}}{t_j} \prod_{1 \leq j < k \leq 3} \frac{1}{t_k - t_j} \psi(r_1, r_2, r_3; t_1, t_2, t_3). \quad (5.92)$$

A questo punto, è immediato generalizzare il risultato per valori di s qualunque. Posta

$$\psi(r_1, \dots, r_s; t_1, \dots, t_s) := \sum_{P \in S_s} (-1)^{|P|} \prod_{j=1}^s t_{P(j)}^{r_j} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \theta_{P(j), P(k)}, \quad (5.93)$$

dal momento che vale

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\lambda, \{\nu\}_s) = c^s \prod_{j=1}^s \frac{a_j^{N-1}}{t_j} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{t_k - t_j} \psi(r_1, \dots, r_s; t_1, \dots, t_s), \quad (5.94)$$

si ottiene

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}(\lambda, \{\nu\}_s) = c^s \prod_{j=1}^s [a(\lambda, \nu_j)]^{N-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{P \in S_s} (-1)^{|P|} \prod_{j=1}^s t_{P(j)}^{r_j-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (t_{P(j)} t_{P(k)} - 2\Delta t_{P(j)} + 1). \quad (5.95)$$

Rappresentazione integrale. Per completare il limite omogeneo, ponendo $t_j = t + z_j, \forall j$, e ricordando la (5.46), possiamo riscrivere la (5.95) come

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} = c^s a^{(N-1)s} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left\{ \frac{\partial_{z_k}^{j-1}}{(j-1)!} \right\} \left[\prod_{j=1}^s (t + z_j)^{r_j-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (1 + (t + z_j)(t + z_k) - 2\Delta(t + z_j)) \right] \Big|_{z_1, \dots, z_s=0}. \quad (5.96)$$

Per introdurre una rappresentazione integrale, esprimiamo le derivate come residui di una opportuna funzione e sfruttiamo il teorema dei residui. Data una generica funzione $F(t + z_1, \dots, t + z_s)$, in virtù della multilinearità del determinante, vale l'identità

$$\det_{1 \leq j, k \leq s} \left\{ \frac{\partial_{z_k}^{j-1}}{(j-1)!} \right\} F(t + z_1, \dots, t + z_s) \Big|_{z_1, \dots, z_s=0} = \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \det_{1 \leq j, k \leq s} \left\{ \left(\frac{1}{z_k} \right)^j \right\} F(t + z_1, \dots, t + z_s). \quad (5.97)$$

Sostituendo nella (5.96) e riscrivendo gli integrali nelle nuove variabili $w_j := \frac{z_j+t}{t}$, arriviamo a

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{top} = c^s a^{s(N-1)} \prod_{j=1}^s t^{r_j-j} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^{r_j-1}}{(w_j-1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} [(w_j - w_k)(t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1)]. \quad (5.98)$$

Funzione di partizione per il reticolo inferiore. Con il solito set di trasformazioni, otteniamo anche

$$Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot} = c^{N-s} b^{(N-s)(N-1)} \prod_{j=1}^{N-s} \tilde{t}^{\tilde{r}_j-j} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^{N-s} w}{(2\pi i)^{N-s}} \prod_{j=1}^{N-s} \frac{w_j^{\tilde{r}_j-1}}{(w_j-1)^{N-s}} \prod_{1 \leq j < k \leq N-s} (w_j - w_k)(\tilde{t}^2 w_j w_k - 2\Delta \tilde{t} w_j + 1), \quad (5.99)$$

funzione di partizione del modello omogeneo relativa al reticolo inferiore.

5.6 Dalla probabilità di configurazione di riga alla EFP

Come detto, uno dei motivi che ci spinge a studiare alcune rappresentazioni della RCP è la possibilità di usarla come punto di partenza per il calcolo di altre funzioni di correlazione: per cominciare, cerchiamo di ottenere da $H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}$ la rappresentazione (5.37) per la EFP.

Per scrivere una rappresentazione per la RCP, abbiamo bisogno di un'espressione per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e una per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$. Nella sezione precedente, ne abbiamo ricavate tre per ognuna di queste, alcune dipendenti dal set di indici $\{r_i\}$, altre da $\{\bar{r}_j\}$. Per costruire una rappresentazione conveniente, è necessario che $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$ siano espresse in termini di indici dello stesso tipo. Una possibilità è quella di usare la (5.98) per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$ e la (5.62) per $Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}$.

A partire da queste due espressioni e dalla (5.39), possiamo scrivere

$$H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)} = \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^{r_j-1}}{z_j^{r_j} (w_j - 1)^s} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \prod_{1 \leq j < k \leq s} \left[(z_k - z_j)(w_j - w_k) \left(\frac{t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \right) \right]. \quad (5.100)$$

Per capire in che modo la EFP sia collegata alla probabilità di configurazione di riga, osserviamo che questa descrive la probabilità di osservare s segmenti pieni sui primi s spigoli della r -esima colonna, che è equivalente alla probabilità di trovare $N - s$ segmenti pieni sugli ultimi spigoli della s -esima riga. Per questo motivo, avendo ordinato gli indici in modo tale che $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq N$, possiamo scrivere

$$F_N^{(r,s)} = \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq r} H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}. \quad (5.101)$$

Osserviamo che, se $r_j \leq 0$, la funzione integranda in (5.100) è regolare in $z_j = 0$ e, dunque, l'integrale lungo C_0 è nullo. Sostituendo in (5.101), possiamo estendere la sommatoria fino a $-\infty$ e ottenere

$$F_N^{(r,s)} = \sum_{-\infty < r_1 < \dots < r_s \leq r} H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}. \quad (5.102)$$

Si può dimostrare (sviluppando in serie il membro di destra) che

$$\sum_{-\infty < r_1 < \dots < r_s \leq r} \prod_{i=1}^s \frac{1}{x_i^{r_i}} = \prod_{i=1}^s \frac{1}{x_i^{r-s+i} (1 - \prod_{l=1}^i x_l)}. \quad (5.103)$$

Applicando questa relazione ponendo $x_j = \frac{z_j}{w_j}$, si arriva a

$$F_N^{(r,s)} = \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^r z_j^{s-r-j}}{(w_j - 1)^s (\prod_{l=1}^j w_l - \prod_{l=1}^j z_l)} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \prod_{1 \leq j < k \leq s} \left((z_k - z_j)(w_j - w_k) \frac{t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \right). \quad (5.104)$$

Osserviamo che il fattore $\prod_{j=1}^s \frac{w_j^r}{(w_j - 1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (w_j - w_k)$ nell'integrale è totalmente antisimmetrico rispetto allo scambio delle variabili w_1, \dots, w_s . Siccome i contributi non nulli agli integrali su queste variabili provengono esclusivamente dalla parte simmetrica della funzione integranda, possiamo limitarci a questa, calcolando $\frac{1}{s!} \mathcal{A}_{\{w_j\}} \left[\frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1}{\prod_{j=1}^s (\prod_{l=1}^j w_l - \prod_{l=1}^j z_l)} \right]$. In particolare, definiamo

$$\Phi_s(w_1, \dots, w_s; z_1, \dots, z_s) = \frac{1}{\Delta_s(\vec{w})} \mathcal{A}_{\{w_j\}} \left[\frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1)}{\prod_{j=1}^s (\prod_{l=1}^j w_l - \prod_{l=1}^j z_l)} \right] \quad (5.105)$$

e sostituiamo nella (5.104); ciò che otteniamo è

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}}{s!} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^r z_j^{s-r-j}}{(w_j - 1)^s} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \prod_{1 \leq j < k \leq s} \left((w_j - w_k)^2 \frac{z_k - z_j}{t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \right). \quad (5.106)$$

Al fine di ottenere un'espressione contenente solo s integrali, vogliamo calcolare gli integrali su $\{w_j\}_{j=1}^s$; per fare ciò, denotiamo la presenza di poli di ordine s nei punti $w_j = 1$, $j = 1, \dots, s$. Si trova che, applicando il teorema dei residui, solo le derivate di $[\Delta_s(\vec{w})]^2$ contribuiscono all'integrale. In particolare, si ottiene

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{w_j^r}{(w_j - 1)^s} \prod_{1 \leq j < k \leq s} (w_j - w_k)^2 \Phi_s(w_1, \dots, w_s; z_1, \dots, z_s) = \\ = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} s! \Phi_s(1, \dots, 1; z_1, \dots, z_s). \end{aligned} \quad (5.107)$$

Utilizzando quest'ultimo risultato in (5.106), abbiamo

$$F_N^{(r,s)} = \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \frac{h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \prod_{1 \leq j < k \leq s} (t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1)}{\prod_{j=1}^s z_j^{r-s+j} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s (t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1)} \Phi_s(1, \dots, 1; z_1, \dots, z_s) \Delta_s(\vec{z}). \quad (5.108)$$

Identità di Cantini e applicazione al calcolo della EFP

Per calcolare esplicitamente $\Phi_s(1, \dots, 1; z_1, \dots, z_s)$, riportiamo la seguente identità (di Cantini [74]).

Dati due set di variabili complesse $u_1 \cdots u_s$ e $v_1 \cdots v_s$, vale

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\{u_j\}} \mathcal{A}_{\{v_i\}} & \left\{ \prod_{1 \leq l < m \leq s} (1 + u_l u_m + \tau u_m)(1 + v_l v_m + \tau v_m) \prod_{l=1}^s \frac{(u_l v_l)^{s-l}}{(1 - \prod_{i=1}^l u_i v_i)} \right\} = \\ & = \left[\prod_{i,j=1}^s (u_i + v_j + \tau u_i v_j) \right] \det_{1 \leq i, j \leq s} \left[\frac{1}{(1 - u_i v_j)(u_i + v_j + \tau u_i v_j)} \right], \quad (5.109) \end{aligned}$$

dove $\mathcal{A}_{\{u_j\}}$ denota l'antisimmetrizzazione rispetto al set di variabili indicato. La dimostrazione di questa relazione è riportata nell'appendice E. Possiamo riscrivere questa identità in modo più conforme alla nostra notazione: ponendo $u_i = z_i t$, $v_j = \frac{1}{w_j t}$ e $\tau = -2\Delta$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\{w_j\}} \mathcal{A}_{\{z_i\}} & \left\{ \frac{\prod_{1 \leq l < m \leq s} z_l (1 + z_l z_m t^2 - 2\Delta t z_m)(1 + w_l w_m t^2 - 2\Delta t w_l)}{\prod_{l=1}^s (\prod_{i=1}^l w_i - \prod_{i=1}^l z_i)} \right\} = \\ & = \left[\prod_{i,j=1}^s (t^2 z_i w_j - 2t\Delta z_i + 1) \right] \det_{1 \leq i, j \leq s} \left[\frac{1}{(w_j - z_i)(t^2 z_i w_j - 2t\Delta z_i + 1)} \right]. \quad (5.110) \end{aligned}$$

Valutando ambo i membri in corrispondenza di $w_j = 1$, $j = 1, \dots, s$, si può dimostrare che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_s(\vec{w})} \mathcal{A}_{\{w_j\}} \mathcal{A}_{\{z_i\}} & \left[\frac{\prod_{1 \leq l < m \leq s} z_l (1 + z_l z_m t^2 - 2\Delta t z_m)(1 + w_l w_m t^2 - 2\Delta t w_l)}{\prod_{l=1}^s (\prod_{i=1}^l w_i - \prod_{i=1}^l z_i)} \right] \Big|_{w_1 = \dots = w_s = 1} = \\ & = (-1)^{\frac{s(s+1)}{2}} \frac{\Delta_s(\vec{z}) Z_s h_{s,s}(u_1, \dots, u_s)}{c^s a^{s(s-1)} \prod_{i=1}^s (z_i - 1)^s} \prod_{j=1}^s [1 + (t^2 - 2\Delta t) z_j]^{s-1}, \quad (5.111) \end{aligned}$$

dove $u_j := u(z_j)$ e $h_{s,s}$ sono le stesse quantità definite nella sezione 5.3.

Torniamo alla relazione (5.108) e osserviamo che, per ragioni di simmetria, l'unico contributo all'integrale sulle variabili $\{z_j\}$ viene da

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\{z_j\}} & \left\{ \prod_{1 \leq j < k \leq s} [(t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1) z_j] \Phi_s(1, \dots, 1; z_1, \dots, z_s) \right\} = \\ & = \frac{\mathcal{A}_{\{w_j\}, \{z_i\}}}{\Delta_s(\vec{w})} \left[\frac{\prod_{1 \leq l < m \leq s} z_l (1 + z_l z_m t^2 - 2\Delta t z_m)(1 + w_l w_m t^2 - 2\Delta t w_l)}{\prod_{l=1}^s (\prod_{i=1}^l w_i - \prod_{i=1}^l z_i)} \right] \Big|_{w_1 = \dots = w_s = 1}. \quad (5.112) \end{aligned}$$

Possiamo allora sostituire l'identità (5.111) in (5.108), giungendo a

$$F_N^{(r,s)} = \frac{(-1)^{\frac{s(s+1)}{2}}}{s!} \frac{Z_s}{c^s a^{s(s-1)}} \oint_{C_0} \cdots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \frac{\prod_{j=1}^s (1 + (t^2 - 2\Delta t)z_j)^{s-1}}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s (t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1)} \times \\ \times [\Delta_s(\vec{z})]^2 \frac{h_{s,s}(u_1, \dots, u_s) h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)}{\prod_{j=1}^s (z_j - 1)^s z_j^r}, \quad (5.113)$$

che è proprio la seconda rappresentazione della EFP in (5.37).

5.7 Funzione di correlazione ad un punto

La quantità a cui siamo maggiormente interessati è la *funzione di correlazione ad un punto* (anche detta polarizzazione): questa è direttamente collegata al gradiente della forma limite e costituisce l'informazione più completa possibile sul comportamento del modello nel limite di *scaling*.

Definiamo la componente verticale della polarizzazione $V_N^{(r,s)}$ come la probabilità di avere un segmento pieno in r -esima posizione, sulla riga s -esima; detto $e_V^{r,s}$ lo spigolo in tale posizione,

$$V_N^{(r,s)} = \sum_S P(S) \chi_{e_V^{r,s}}(S). \quad (5.114)$$

Analogamente, la componente orizzontale della polarizzazione $O_N^{(r,s)}$ è la probabilità di trovare un segmento pieno in s -esima posizione, sulla r -esima colonna,

$$O_N^{(r,s)} = \sum_S P(S) \chi_{e_O^{r,s}}(S), \quad (5.115)$$

dove $e_O^{r,s}$ è lo spigolo nella suddetta posizione. Osserviamo che, in virtù della simmetria di *crossing* e di quella sotto riflessione rispetto alle diagonali del reticolo, possiamo esprimere $O_N^{(r,s)}$ in termini di $V_N^{(r,s)}$.

Per scrivere la componente verticale della polarizzazione in termini della RCP, definiamo una funzione di correlazione intermedia,

$$A_{N,l}^{(r,s)} = \sum_{\substack{1 \leq r_1 < \dots < r_l < r \\ r < r_{l+1} < \dots < r_s \leq N}} H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}, \quad (5.116)$$

che misura la probabilità di avere, sulla s -esima riga, l segmenti vuoti a destra dello spigolo in posizione r -esima e gli altri $s - l$ a sinistra. La funzione $V_N^{(r,s)}$ non dipende da quanti segmenti vuoti ci sono a destra dello spigolo r -esimo e, pertanto, si ha

$$V_N^{(r,s)} = \sum_{l=0}^s A_{N,l}^{(r,s)}. \quad (5.117)$$

Si può dimostrare che la rappresentazione (5.100) si annulla se, per qualche j , $r_j \leq 0$ o $r_j \geq N + 1$: possiamo perciò scrivere

$$A_{N,l}^{(r,s)} = \sum_{\substack{-\infty < r_1 < \dots < r_l < r \\ r < r_{l+1} < \dots < r_s < +\infty}} H_{N,s}^{(r_1, \dots, r_s)}. \quad (5.118)$$

Utilizzando l'identità (5.103) e una sua variante, ovvero,

$$\sum_{r < r_{l+1} < \dots < \infty} \prod_{j=l+1}^s x_j^{r_j} = \prod_{j=l+1}^s \frac{x^{r+j-l}}{(1 - \prod_{k=j}^s x_k)}, \quad (5.119)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} A_{N,l}^{(r,s)} &= \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \oint_{C_1} \frac{d^s w}{(2\pi i)^s} \left[\frac{\Delta_s(-\vec{w})}{\prod_{j=1}^s w_j^{1-r} (w_j - 1)^s} \right] \times \\ &\times \left[\prod_{j=1}^l \frac{1}{z_j^{j-l-1} (\prod_{k=1}^j w_k - \prod_{k=1}^j z_k)} \prod_{j=l+1}^s \frac{w_j^{j-l}}{(\prod_{k=j}^s z_k - \prod_{k=j}^s w_k)} \right] \times \\ &\times \prod_{1 \leq j < k \leq s} \left(t^2 w_j w_k - 2\Delta t w_j + 1 \right) \left(t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1 \right) \times \\ &\times \left[\frac{\Delta_s(\vec{z}) h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)}{\prod_{j=1}^s z_j^r \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^s t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \right]. \quad (5.120) \end{aligned}$$

Questa formula costituisce il risultato principale del lavoro di tesi.

L'espressione (5.120) mostra delle similitudini con (5.104). Questo suggerisce di simmetrizzare la funzione integranda in (5.120) tramite l'identità (5.110): al momento, in virtù delle complicazioni che sorgono rispetto al caso precedente, non è ancora chiaro come procedere in questo calcolo.

Concludiamo questa sezione fornendo un'interpretazione per la funzione $A_{N,l}^{(r,s)}$. Introduciamo una funzione altezza, definita sulle facce del reticolo, il cui valore sia tale che, considerato un certo uno stato del sistema:

- date due facce separate da un segmento pieno, passando da una faccia all'altra muovendosi verso sinistra o verso l'alto, l'altezza aumenti di 1, mentre, muovendosi nei versi contrari, l'altezza diminuisca di 1;
- date due facce separate da un segmento vuoto, passando dall'una all'altra, l'altezza rimanga costante.

Se imponiamo che il valore sul bordo sia pari a quello riportato in figura 5.3, possiamo scrivere il valore della funzione altezza sulla faccia individuata

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
8									0
7									0
6									0
5									0
4									0
3									0
2									0
1									0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 5.3: Le condizioni al contorno per la nuova funzione altezza su un reticolo 9×9 .

dall'intersezione tra la colonna r -esima e la riga s -esima come

$$\mathfrak{h}_N(r, s) := \text{numero di segmenti pieni sui primi } r \text{ spigoli della } s\text{-esima riga.} \quad (5.121)$$

Possiamo pertanto concludere che $A_{N,l}^{(r,s)}$ misura la probabilità che $\mathfrak{h}_N(r, s) = r - l$.

5.8 Condizioni al contorno a parete di dominio parziali

Consideriamo il modello a sei vertici su un reticolo quadrato con $N - s$ linee orizzontali e N linee verticali e imponiamo le cosiddette condizioni al contorno a parete di dominio parziali, introdotte in [70]: ciò consiste nel porre segmenti vuoti sugli spigoli esterni in basso e a destra, segmenti pieni sugli spigoli esterni a sinistra e lasciare liberi gli spigoli esterni in alto. Indichiamo la funzione di partizione di questo modello con $Z_{N,N-s}^{parz}$.

Dalla definizione segue che

$$Z_{N,N-s}^{parz} = \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq N} Z_{r_1, \dots, r_s}^{bot}. \quad (5.122)$$

Sostituendo (5.62), si osserva che, anche stavolta, possiamo estendere la somma fino a $-\infty$. Utilizzando la relazione (5.103), si giunge, per il modello

omogeneo, a

$$Z_{N,N-s}^{parz} = \frac{Z_N \prod_{j=1}^s t^j}{c^s a^{s(N-1)}} \oint_{C_0} \dots \oint_{C_0} \frac{d^s z}{(2\pi i)^s} \prod_{j=1}^s \frac{1}{(tz_j)^{N-s+j} (1 - \prod_{l=1}^j tz_l)} h_{N,s}(z_1, \dots, z_s) \Delta_s(\vec{z}) \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_k + 1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1}. \quad (5.123)$$

Per ragioni di simmetria, l'unico contributo all'integrale verrà dalla parte simmetrica della funzione integranda. Osservando che il fattore

$$\frac{\Delta_s(\vec{z}) h_{N,s}(z_1, \dots, z_s)}{\prod_{j=1}^s (tz_j)^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s t^2 z_j z_k - 2\Delta t z_j + 1} \quad (5.124)$$

è antisimmetrico rispetto allo scambio delle variabili z_1, \dots, z_s , è necessario calcolare

$$\frac{1}{s!} \mathcal{A}_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}} \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (\zeta_j \zeta_k - 2\Delta \zeta_k + 1) \zeta_j}{\prod_{j=1}^s (1 - \prod_{l=1}^j \zeta_l)}, \quad (5.125)$$

dove si è posto $\zeta_j := tz_j$.

L'espressione antisimmetrizzata, per un generico valore di Δ , non è ancora stata ottenuta, ma, sulla base di calcoli analitici e numerici effettuati per alcuni valori di Δ o di s , si può congetturare l'identità

$$\mathcal{A}_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}} \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (\zeta_j \zeta_k - 2\Delta \zeta_k + 1) \zeta_j}{\prod_{j=1}^s (1 - \prod_{l=1}^j \zeta_l)} = \frac{\Delta_s(-\vec{\zeta}) P_s(\vec{\zeta})}{\prod_{j=1}^s (1 - \zeta_j) \prod_{1 \leq j < k \leq s} (1 - \zeta_j \zeta_k)}, \quad (5.126)$$

dove P_s è un polinomio di grado $s - 1$ in ogni variabile, simmetrico rispetto allo scambio di ζ_1, \dots, ζ_s .

Il polinomio P_s è noto al momento solo per due valori di Δ . Se $\Delta = 1$, si ha

$$P_s(\vec{\zeta}) = \prod_{1 \leq j < k \leq s} (1 - \zeta_j \zeta_k), \quad (5.127)$$

da cui [71]

$$\mathcal{A}_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}} \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (\zeta_j \zeta_k - 2\zeta_k + 1) \zeta_j}{\prod_{j=1}^s (1 - \prod_{l=1}^j \zeta_l)} = \frac{\Delta_s(-\vec{\zeta})}{\prod_{j=1}^s (1 - \zeta_j)}. \quad (5.128)$$

Se, invece, $\Delta = 0$, abbiamo provato che

$$P_s(\vec{\zeta}) = \prod_{1 \leq j < k \leq s} (1 + \zeta_j \zeta_k) \quad (5.129)$$

e quindi

$$\mathcal{A}_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}} \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (\zeta_j \zeta_k + 1) \zeta_j}{\prod_{j=1}^s (1 - \prod_{l=1}^j \zeta_l)} = \frac{\Delta_s(-\vec{\zeta}) \prod_{1 \leq j < k \leq s} (\zeta_j \zeta_k + 1)}{\prod_{j=1}^s (1 - \zeta_j) \prod_{1 \leq j < k \leq s} (1 - \zeta_j \zeta_k)}. \quad (5.130)$$

La dimostrazione di questa formula è analoga a quella dell'identità di Cantini (si veda l'appendice E), con la differenza che, in questo caso, l'antisimmetrizzazione è effettuata rispetto ad un solo set di s variabili.

Grazie a (5.123) e (5.130), possiamo studiare il limite di *scaling* di questo modello per $\Delta = 0$: in appendice F è riportato il calcolo della densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore del reticolo. Questa quantità è direttamente collegata alla componente lungo il bordo del gradiente della forma limite.

5.9 Considerazioni conclusive

Il principale risultato di questo lavoro di tesi è la rappresentazione (5.120) per la funzione di correlazione ad un punto. L'obiettivo futuro è quello di studiare il limite di *scaling* di questa quantità per ricavare informazioni più complete possibile sul comportamento del modello, in particolare sulla sua forma limite. In questa tesi sono stati ottenuti anche alcuni altri risultati.

Nella sezione 5.6, abbiamo dimostrato in maniera alternativa la formula (5.37) per la EFP; nel procedimento, è stata utilizzata l'interessante identità (5.110). Questa stessa identità potrebbe portare ad una semplificazione della (5.120) in vista dello studio del suo comportamento asintotico nel limite di *scaling*.

In questo lavoro, è stato anche considerato il modello con condizioni al contorno a parete di dominio parziali, altro esempio in cui si osserva separazione spaziale delle fasi. Nella sezione 5.8, abbiamo ricavato una rappresentazione integrale per la funzione di partizione. Poiché siamo riusciti a simmetrizzare la funzione integranda solo per $\Delta = 0$ e $\Delta = 1$, lo studio del limite di *scaling* è accessibile al momento solo in questi due casi. Per $\Delta = 1$, il calcolo è banale e il risultato non particolarmente interessante. Per $\Delta = 0$, invece, si hanno risultati non banali, riportati in appendice F.

Appendice A

Derivazione della rappresentazione di Izergin-Korepin

Seguendo [63], diamo un derivazione della formula di Izergin-Korepin. Troveremo una relazione di ricorrenza che lega la funzione di partizione sul reticolo $N \times N$ a quella sul reticolo $N - 1 \times N - 1$. Sostituendo la rappresentazione (5.22) in questa relazione, se ne dimostra la validità.

Introduciamo una funzione di correlazione locale, detta *polarizzazione spontanea di bordo*. Questa descrive la probabilità di trovare un segmento vuoto sull'ultima linea orizzontale, nella $M - 1$ -esima colonna. Se indichiamo $e_O^{M-1,N}$ lo spigolo nella suddetta posizione, possiamo scrivere questa funzione di correlazione come,

$$G_N^{(M)} = 1 - \sum_S P(S) \chi_{e_O^{M-1,N}}(S). \quad (\text{A.1})$$

In termini del QISM, $G_N^{(M)}$ è la funzione di correlazione ad un punto del proiettore di spin locale $\frac{1+\sigma_N^{(z)}}{2}$; infatti, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_N^{(M)}(\{\lambda\}, \{\nu\}) &= \frac{1}{Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\})} \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^N k \langle \downarrow | \right) B(\lambda_N) \dots B(\lambda_M) \left(\frac{1 + \sigma_N^{(z)}}{2} \right) B(\lambda_{M-1}) \dots B(\lambda_1) \left(\prod_{l=1}^N | \uparrow \rangle_l \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Decomponiamo la matrice di monodromia verticale nel prodotto di due matrici,

$$T_\alpha(\lambda_\alpha) = T_{\alpha N}(\lambda_\alpha) \bar{T}_\alpha(\lambda_\alpha), \quad (\text{A.3})$$

dove

$$T_{\alpha N}(\lambda_\alpha) = L_{\alpha N}(\lambda_\alpha, \nu_N) = \begin{pmatrix} a_{\alpha N} \frac{1+\sigma_N^{(z)}}{2} + b_{\alpha N} \frac{1-\sigma_N^{(z)}}{2} & c_{\alpha N} \sigma_N^{(-)} \\ c_{\alpha N} \sigma_N^{(+)} & a_{\alpha N} \frac{1-\sigma_N^{(z)}}{2} + b_{\alpha N} \frac{1+\sigma_N^{(z)}}{2} \end{pmatrix} := \\ = \begin{pmatrix} A_N(\lambda_\alpha) & B_N(\lambda_\alpha) \\ C_N(\lambda_\alpha) & D_N(\lambda_\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\bar{T}_\alpha(\lambda_\alpha) = L_{\alpha(N-1)}(\lambda_\alpha, \nu_{N-1}) \dots L_{\alpha(1)}(\lambda_\alpha, \nu_1) := \begin{pmatrix} \bar{A}(\lambda_\alpha) & \bar{B}(\lambda_\alpha) \\ \bar{C}(\lambda_\alpha) & \bar{D}(\lambda_\alpha) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Questa decomposizione è nota come *modello a due siti*. Notiamo che ogni elemento di $T_{\alpha N}$ commuta con ogni elemento di \bar{T}_α e che ogni set di operatori nelle due matrici soddisfa l'algebra di Yang-Baxter (4.78)-(4.90). Dal momento che

$$B(\lambda_\alpha) = A_N \bar{B} + B_N \bar{D}, \quad (\text{A.6})$$

e siccome posso fare agire diagonalmente sugli stati esterni tutti gli operatori di $T_{\alpha N}$, $\forall \alpha$, abbiamo ridotto il problema del calcolo di (A.2) a quello di un prodotto scalare che coinvolge solo operatori \bar{B} e \bar{D} ; si ottiene, infatti,

$$G_N^{(M)}(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \frac{\sin 2\eta}{Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\})} \sum_{\beta=M}^N \prod_{\alpha=\beta+1}^N \sin(\lambda_\alpha - \nu_N - \eta) \prod_{\alpha=1}^{\beta-1} \sin(\lambda_\alpha - \nu_N + \eta) \\ \left(\prod_{k=1}^{N-1} k \langle \downarrow | \right) \bar{B}(\lambda_N) \dots \bar{B}(\lambda_{\beta+1}) \bar{D}(\lambda_\beta) \bar{B}(\lambda_{\beta-1}) \dots \bar{B}(\lambda_1) \left(\prod_{l=1}^{N-1} | \uparrow \rangle_l \right). \quad (\text{A.7})$$

In quest'ultima espressione, consideriamo il termine con $\beta = M$; al fine di far agire $\bar{D}(\lambda_M)$ sullo stato esterno, osserviamo che

$$\left(\prod_{k=1}^{N-1} k \langle \downarrow | \right) \bar{B}(\lambda_N) \dots \bar{B}(\lambda_{M+1}) \bar{D}(\lambda_M) \bar{B}(\lambda_{M-1}) \dots \bar{B}(\lambda_1) \left(\prod_{l=1}^{N-1} | \uparrow \rangle_l \right) = \\ = \prod_{l=1}^{N-1} \sin(\lambda_M - \nu_l + \eta) \prod_{\gamma=M+1}^N f(\lambda_M, \lambda_\gamma) \\ \left(\prod_{k=1}^{N-1} k \langle \downarrow | \right) \bar{B}(\lambda_N) \dots \bar{B}(\lambda_{M+1}) \bar{B}(\lambda_{M-1}) \dots \bar{B}(\lambda_1) \left(\prod_{l=1}^{N-1} | \uparrow \rangle_l \right) + \text{altri termini}, \quad (\text{A.8})$$

dove gli altri termini contengono prodotti scalari in cui figura l'operatore $\bar{B}(\lambda_M)$. Possiamo verificare questa relazione, in modo analogo a quanto visto nella sezione 5.1.

Dall'espressione (A.2), risulta evidente la simmetria di $G_N^{(M)}$ rispetto allo scambio di $\lambda_M, \dots, \lambda_N$; dunque, i termini non scritti esplicitamente sono ottenuti permutando questo set di parametri spettrali. Sostituendo in (A.7), si ha

$$G_N^{(M)}(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \frac{\sin 2\eta}{Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\})} \prod_{\alpha=M}^N \sin(\lambda_\alpha - \nu_N - \eta) \prod_{\alpha=1}^{M-1} \sin(\lambda_\alpha - \nu_N + \eta) \\ \sum_{\beta=M}^N \frac{\prod_{l=1}^{N-1} \sin(\lambda_\beta - \nu_l + \eta)}{\sin(\lambda_\beta - \nu_N - \eta)} \prod_{\substack{\gamma=M \\ \gamma \neq \beta}}^N f(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) Z_{N-1}(\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \neq \beta}, \{\nu_k\}_{k \neq N}), \quad (\text{A.9})$$

dove è stata utilizzata (5.21) per la funzione di partizione sul reticolo $N - 1 \times N - 1$.

Osservando che $G_N^{(1)} = 1$ e sfruttando la simmetria di Z_N rispetto allo scambio di ν_1, \dots, ν_N , si trova

$$Z_N(\{\lambda\}, \{\nu\}) = \sin 2\eta \sum_{\beta=1}^N \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \sin(\lambda_\alpha - \nu_j - \eta) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sin(\lambda_\beta - \nu_k + \eta) \times \\ \times \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^N f(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) Z_{N-1}(\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \neq \beta}, \{\nu_k\}_{k \neq j}). \quad (\text{A.10})$$

Questa è la relazione di ricorrenza cercata: si dimostra che l'espressione (5.22) soddisfa questa formula ed è consistente con la condizione iniziale $Z_1 = c = \sin 2\eta$. Dunque, è una rappresentazione per la funzione di partizione del modello a sei vertici non omogeneo con DWBC su reticolo $N \times N$.

Appendice B

Limite omogeneo

Riportiamo il calcolo del limite omogeneo della formula di Izergin-Korepin, seguendo quanto illustrato in [62]. Tale procedura può essere estesa anche al caso di altre funzioni di correlazione, come visto nella sezione 5.5.

Ricordiamo che il limite omogeneo consiste nel valutare la funzione di partizione in corrispondenza di $\lambda_\alpha = \lambda$, $\alpha = 1, \dots, N$ e $\nu_k = 0$, $k = 1, \dots, N$.

Ripartendo da (5.22), possiamo porre $\lambda_1 = \lambda$. Se $\lambda_2 = \lambda$, si annullano sia il numeratore che il denominatore. Per valutare questa forma indeterminata, ci concentriamo sulla matrice \mathcal{M} e sviluppiamo la funzione $\varphi(\lambda_2, \nu_k)$ in serie di Taylor intorno a λ ,

$$\varphi(\lambda_2, \nu_k) = \varphi(\lambda, \nu_k) + (\lambda_2 - \lambda)\varphi'(\lambda, \nu_k) + o((\lambda_2 - \lambda)), \quad (\text{B.1})$$

dove φ' indica la derivata parziale di φ rispetto a λ . Eliminiamo il termine di ordine zero sottraendo la prima riga dalla seconda (operazione che non altera il determinante). I termini contenuti nella seconda riga saranno ora della forma

$$(\lambda_2 - \lambda)\varphi'(\lambda, \nu_k) + \frac{1}{2!}(\lambda_2 - \lambda)^2\varphi''(\lambda, \nu_k) + o((\lambda_2 - \lambda)^2). \quad (\text{B.2})$$

Fattorizziamo fuori dal determinante $(\lambda_2 - \lambda)$ che si semplifica, nel limite $\lambda_2 \rightarrow \lambda$, con lo zero del denominatore. Successivamente, espandiamo in serie di Taylor gli elementi della terza riga e sottraiamo loro gli elementi della prima riga e quelli della seconda moltiplicati per $(\lambda_3 - \lambda)$: ciò che resta è $\frac{1}{2!}(\lambda_3 - \lambda)^2\varphi''(\lambda, \nu_k) + o((\lambda_3 - \lambda)^2)$: estraendo $(\lambda_3 - \lambda)^2$, vengono cancellati altri due fattori nulli a denominatore. Iterando, si osserva che, nel limite, tutti i fattori di $\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} d(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)$ vengono semplificati da quelli estratti dal determinante. Ricordando i fattoriali che vengono dallo sviluppo in serie

di Taylor, si giunge a

$$Z_N(\lambda, \{\nu\}) = \frac{\prod_{k=1}^N (a(\lambda, \nu_k) b(\lambda, \nu_k))^N}{\prod_{j=1}^{N-1} j! \prod_{1 \leq j < k \leq N} d(\nu_j, \nu_k)} \begin{vmatrix} \varphi(\lambda, \nu_1) & \dots & \varphi(\lambda, \nu_k) & \dots & \varphi(\lambda, \nu_N) \\ \varphi'(\lambda, \nu_1) & \dots & \varphi'(\lambda, \nu_k) & \dots & \varphi'(\lambda, \nu_N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi^{(\beta-1)}(\lambda, \nu_1) & \dots & \varphi^{(\beta-1)}(\lambda, \nu_k) & \dots & \varphi^{(\beta-1)}(\lambda, \nu_N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi^{(N-1)}(\lambda, \nu_1) & \dots & \varphi^{(N-1)}(\lambda, \nu_k) & \dots & \varphi^{(N-1)}(\lambda, \nu_N) \end{vmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

dove abbiamo indicato le derivate parziali di ordine β rispetto a λ con $\varphi^{(\beta)}$. Questa formula rappresenta la funzione di partizione del modello omogeneo lungo le linee verticali, ma non lungo quelle orizzontali.

A questo punto, possiamo svolgere anche il limite $\nu_k \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, N$. Applichiamo la stessa procedura, valutando un limite dopo l'altro, in ordine crescente nell'indice k . In questo caso, sviluppando in serie di Taylor i vari elementi \mathcal{M} , si eliminano i termini di ordine più basso tramite operazioni di colonna. Alla fine del calcolo, si ottiene proprio la relazione (5.25).

Appendice C

Richiami sui polinomi ortogonali

Abbiamo visto che, tramite l'introduzione di un opportuno set di polinomi ortogonali, è possibile ottenere la rappresentazione (5.56) per la funzione di partizione $Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}$. Riportiamo, per completezza, alcune proprietà dei polinomi ortogonali.

Indichiamo con $L_\alpha^2([a, b])$ lo spazio di Hilbert delle funzioni f tali che $\int_a^b |f(x)|^2 \alpha(x) dx < \infty$.

Definizione (*Sistema ortogonale*). Sia $\alpha(x)$ una funzione non negativa sull'intervallo $[a, b]$ (che chiamiamo funzione peso) e sia $\{\varphi_j\}_{j=0}^l$ un set di funzioni appartenenti allo spazio $L_\alpha^2([a, b])$. Diciamo che $\{\varphi_j\}_{j=0}^l$ è un sistema ortogonale rispetto al peso $\alpha(x)$ se

$$(\varphi_i, \varphi_j) := \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) \alpha(x) dx = h_i \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, l. \quad (\text{C.1})$$

Osserviamo che un sistema ortogonale è definito sempre a meno di un fattore moltiplicativo costante per ogni elemento. Inoltre, dato un insieme $\{f_j\}_{j=0}^l$ di funzioni nello spazio $L_\alpha^2([a, b])$ linearmente indipendenti tra loro, è sempre possibile costruire un sistema ortogonale. Infatti, è facile verificare che

$$\varphi_j(x) := \begin{vmatrix} (f_0, f_0) & \dots & (f_0, f_j) \\ (f_1, f_0) & \dots & (f_1, f_j) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (f_{j-1}, f_0) & \dots & (f_{j-1}, f_j) \\ f_0(x) & \dots & f_j(x) \end{vmatrix}, \quad j = 0, \dots, l, \quad (\text{C.2})$$

è ortogonale a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{j-1}(x)$. Da ciò si ottiene

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, \dots, l. \quad (\text{C.3})$$

Consideriamo il set di funzioni linearmente indipendenti $\{x^j\}_{j=0}^{\infty}$ e costruiamo $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ tale che

$$p_j(x) = \begin{vmatrix} (1, 1) & \dots & (1, x^j) \\ (x, 1) & \dots & (x, x^j) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (x^{j-1}, 1) & \dots & (x^{j-1}, x^j) \\ 1 & \dots & x^j \end{vmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.4})$$

Questo insieme definisce un *sistema di polinomi ortogonali*; vale, infatti, $(p_i, p_j) = h_i \delta_{i,j}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Al variare della funzione peso $\alpha(x)$, che al momento lasciamo del tutto generica, otteniamo le varie classi di polinomi ortogonali (si veda [72]). In base a questa costruzione, è evidente che, per costruire un sistema di polinomi ortogonali, è sufficiente scegliere una funzione peso $\alpha(x)$.

Un polinomio si dice monico se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale a 1. Detto k_j il coefficiente del termine di grado massimo di $p_j(x)$, costruiamo il set di polinomi ortogonali monici $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ tali che

$$P_j(x) = \frac{1}{k_j} p_j(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.5})$$

Definiamo il momento n -esimo del peso $\alpha(x)$ come

$$c_n = \int_a^b x^n \alpha(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.6})$$

e indichiamo con G_n il determinante

$$G_n := \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_n \\ c_1 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_n & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Notiamo che, definendo $G_{n-1}^{(j)}$ il determinante della matrice in (C.7) a cui sono state rimosse l'ultima riga e la j -ima colonna, possiamo esprimere il generico $P_n(x)$ come

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} G_{n-1}^{(j)} x^j. \quad (\text{C.8})$$

Così facendo, si verifica che

$$h_n := (P_n, P_n) = \frac{G_n}{G_{n-1}} \quad (\text{C.9})$$

e, da questa,

$$\prod_{j=0}^{n-1} h_j = G_n. \quad (\text{C.10})$$

Queste ultime identità sono utili per verificare la relazione (5.52).

Proposizione. *Dato un set di polinomi ortogonali monici, si ha, per $k < n$, $n, k = 0, 1, 2, \dots$,*

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-k-1} & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & & \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & & \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & & \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-k-2} & x_1^{n-1} & \dots & x_k^{n-1} \end{vmatrix} = h_0 h_1 \dots h_{n-k-1} \det_{1 \leq j, l \leq k} \{P_{n-k+j-1}(x_l)\}. \quad (\text{C.11})$$

Dimostrazione. Siano A e B due matrici tali che $A_{ij} = x_j^{i-1}$ e $B_{ij} = P_{i-1}(x_j)$, con $i, j = 1, \dots, n$. Siccome ogni B_{ij} è combinazione lineare degli elementi della matrice A e i polinomi $P_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, sono monici, si ha

$$\det A = \det B. \quad (\text{C.12})$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\prod_{l=1}^{n-k} \int \alpha(x_l) x_l^{l-1} dx$, sfruttando l'identità (C.10) e l'ortogonalità dei polinomi, si ottiene, opportunamente rinominando le variabili, l'equazione (C.11). \square

Appendice D

Dimostrazione dell'identità (5.67)

In questa appendice, riportiamo la dimostrazione dell'identità (5.67), che permette di scrivere una somma di termini come integrali sul piano complesso di un'opportuna funzione.

Vogliamo provare che

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\lambda_{r_1}}} \frac{dz_1}{2\pi i} \cdots \oint_{C_{\lambda_{r_s}}} \frac{dz_s}{2\pi i} F(z_1, \dots, z_s) \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} d(z_k, z_j)}{\prod_{j=1}^s \prod_{\beta_j=1}^{r_j} d(z_j, \lambda_{\beta_j})} = \\ = \sum_{\substack{\alpha_s=1 \\ \alpha_{s-1} \neq \alpha_s}}^{r_s} \sum_{\substack{\alpha_{s-1}=1 \\ \alpha_{s-1} \neq \alpha_s}}^{r_{s-1}} \cdots \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_s}}^{r_1} \frac{F(\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s})}{\prod_{j=1}^s \prod_{\substack{\beta_j=1 \\ \beta_j \neq \alpha_1, \dots, \alpha_j}}^{r_j} d(\lambda_{\alpha_j}, \lambda_{\beta_j})}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

dove, $C_{\lambda_{r_j}}$ è un cammino che circonda i soli poli $\{\lambda_1 \dots \lambda_{r_j}\}$. Ricordiamo che i parametri spettrali $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_s}$, essendo definiti, nella parametrizzazione scelta, tra η e $\pi - \eta$, con $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, si trovano tutti nella striscia verticale di piano complesso compresa tra 0 e π .

Partiamo da un caso più semplice e calcoliamo l'integrale

$$\mathbf{I}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_s}) = \oint_{C_{\lambda_{r_1}}} \frac{dz_1}{2\pi i} \cdots \oint_{C_{\lambda_{r_s}}} \frac{dz_s}{2\pi i} F(z_1, \dots, z_s) \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j)}{\prod_{j=1}^s \prod_{\beta_j=1}^{r_j} (z_j - \lambda_{\beta_j})}. \quad (\text{D.2})$$

Eseguiamo prima l'integrale sulla variabile z_1 : il circuito $C_{\lambda_{r_1}}$ contiene, per

definizione, r_1 poli. Applicando il teorema dei residui, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_s}) &= \sum_{\alpha_1=1}^{r_1} \oint_{C_{\lambda_{r_2}}} \frac{dz_2}{2\pi i} \cdots \oint_{C_{\lambda_{r_s}}} \frac{dz_s}{2\pi i} F(\lambda_{\alpha_1}, \dots, z_s) \times \\ &\quad \times \frac{\prod_{j=2}^s (z_j - \lambda_{\alpha_1}) \prod_{2 \leq j < k \leq s} (z_k - z_j)}{\prod_{j=2}^s \prod_{\substack{\beta_j=1 \\ \beta_1 \neq \alpha_1}}^{r_j} (z_j - \lambda_{\beta_j}) \prod_{\substack{\beta_1=1 \\ \beta_1 \neq \alpha_1}}^{r_1} (\lambda_{\alpha_1} - \lambda_{\beta_1})}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Eseguendo poi gli integrali successivi, da quello su z_2 fino a quello su z_s , si osserva che i fattori che compaiono a numeratore si semplificano con alcuni dei fattori a denominatore. Così facendo, si giunge a

$$\mathbf{I}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_s}) = \sum_{\alpha_s=1}^{r_s} \sum_{\substack{\alpha_{s-1}=1 \\ \alpha_{s-1} \neq \alpha_s}}^{r_{s-1}} \cdots \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \dots, \alpha_s}}^{r_1} \frac{F(\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_s})}{\prod_{j=1}^s \prod_{\substack{\beta_j=1 \\ \beta_j \neq \alpha_1, \dots, \alpha_j}}^{r_j} (\lambda_{\alpha_j} - \lambda_{\beta_j})}. \quad (\text{D.4})$$

Se, invece, consideriamo il membro di sinistra della (D.1), dobbiamo tenere conto che la funzione $d(z, \nu)$ è periodica di periodo 2π e ha un numero infinito di poli del tipo $z = \nu + \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$. La procedura illustrata sopra funziona ancora in modo identico, a patto di considerare $C_{\lambda_{r_i}}, i = 1, \dots, s$, contenuti completamente nella striscia verticale di piano complesso compresa tra 0 e π (che, come osservato sopra, contiene tutti i poli intorno a cui integriamo). Con questa accortezza, si dimostra (D.1).

Appendice E

Dimostrazione dell'identità di Cantini

In questa appendice, riportiamo la dimostrazione dell'identità [74]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\{u_j\}} \mathcal{A}_{\{v_i\}} \left\{ \prod_{1 \leq l < m \leq s} (1 + u_l u_m + \tau u_m) (1 + v_l v_m + \tau v_m) \prod_{l=1}^s \frac{(u_l v_l)^{s-l}}{(1 - \prod_{i=1}^l u_i v_i)} \right\} = \\ = \left[\prod_{i,j=1}^s (u_i + v_j + \tau u_i v_j) \right] \det_{1 \leq i,j \leq s} \left[\frac{1}{(1 - u_i v_j)(u_i + v_j + \tau u_i v_j)} \right], \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

dove $\{u_j\}$ e $\{v_k\}$ sono due set di s variabili complesse e τ è un parametro complesso arbitrario.

Indichiamo con $R_s(\{u\}, \{v\})$ il membro di destra della relazione e con $L_s(\{u\}, \{v\})$ quello di sinistra. Procediamo per induzione: per $s = 1$, è immediato verificare che $L_1(u, v) = R_1(u, v)$. Adesso supponiamo vera l'identità per il passo $s - 1$ (ipotesi induttiva) e dimostriamo che questo implica

$$R_s(\{u\}, \{v\}) = L_s(\{u\}, \{v\}). \quad (\text{E.2})$$

Per prima cosa, osserviamo che possiamo scrivere

$$R_s(\{u\}, \{v\}) = \frac{\Delta_s(\vec{u}) \Delta_s(\vec{v}) \tilde{R}_s(\{u\}, \{v\})}{\prod_{i,j=1}^s (1 - u_i v_j)}, \quad (\text{E.3})$$

con $\tilde{R}_s(\{u\}, \{v\})$ polinomio di grado $s-1$, simmetrico separatamente rispetto allo scambio delle variabili $\{u\}$ e delle variabili $\{v\}$.

Se adesso dimostriamo che $(1 - \prod_{i=1}^s u_i v_i) L_s(\{u\}, \{v\})$, come funzione delle u_j , presenta dei poli in $u_j = \frac{1}{v_i}$, $i, j = 1, \dots, s$, con considerazioni di

simmetria e di conteggio di potenze, possiamo scrivere

$$\left(1 - \prod_{i=1}^s u_i v_i\right) L_s(\{u\}, \{v\}) = \frac{\Delta_s(\vec{u}) \Delta_s(\vec{v}) \tilde{L}_s(\{u\}, \{v\})}{\prod_{i,j=1}^s (1 - u_i v_j)}, \quad (\text{E.4})$$

dove $\tilde{L}_s(\{u\}, \{v\})$ è un polinomio di grado s , simmetrico separatamente rispetto allo scambio delle variabili dei due set.

Per verificare la struttura dei poli, è sufficiente sviluppare le antisimmetrizzazioni in L_s ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \prod_{i=1}^s u_i v_i\right) L_s(\{u\}, \{v\}) &= \sum_{h,k=1}^s (-1)^{h+k} \prod_{i \neq h}^s u_i (1 + u_i u_h + \tau u_h) \\ &\quad \prod_{j \neq k}^s v_j (1 + v_j v_k + \tau v_k) L_{s-1}(\{u\}/u_h, \{v\}/v_k), \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

dove abbiamo indicato con $\{u\}/u_h$ un set di variabili in cui è stata rimossa la h -esima. Usando l'ipotesi induttiva,

$$L_{s-1}(\{u\}/u_h, \{v\}/v_k) = R_{s-1}(\{u\}/u_h, \{v\}/v_k), \quad (\text{E.6})$$

si verifica che i poli di $(1 - \prod_{i=1}^s u_i v_i) L_s(\{u\}, \{v\})$ sono quelli menzionati in precedenza.

Eguagliando (E.3) e (E.4), si ha che, per dimostrare l'identità di partenza, è sufficiente provare

$$\tilde{R}_s(\{u\}, \{v\}) \left(1 - \prod_{i=1}^s u_i v_i\right) = \tilde{L}_s(\{u\}, \{v\}). \quad (\text{E.7})$$

Dal momento che questa è un'identità tra due polinomi di grado s in ciascuna delle variabili u_j , ci basta mostrare che i due membri coincidono su $s+1$ valori della variabile u_1 (possiamo sceglierne una qualunque, dato che la simmetria dell'identità le rende equivalenti). Si può dimostrare, sfruttando l'ipotesi induttiva, che

$$\text{Res}_{u_1 = \frac{1}{v_j}} L_s(\{u\}, \{v\}) = \text{Res}_{u_1 = \frac{1}{v_j}} R_s(\{u\}, \{v\}), \quad j = 1, \dots, s. \quad (\text{E.8})$$

Questo implica che i due membri di (E.7) sono uguali se valutati per $u_1 = \frac{1}{v_j}, j = 1, \dots, s$. Per completare la dimostrazione, verifichiamo che la (E.7) $u_1 = 0$. Chiamiamo M la matrice che compare nel determinante in R_s valutata per $u_1 = 0$; in questo modo,

$$R_s(\{u\}, \{v\}) \Big|_{u_1=0} = \prod_{j=1}^s v_j \prod_{\substack{2 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} (u_i + v_j + \tau u_i v_j) \det M. \quad (\text{E.9})$$

D'altra parte, valutando $L_s \Big|_{u_1=0}$ e sfruttando l'ipotesi induttiva, è possibile ottenere la relazione,

$$L_s(\{u\}, \{v\}) \Big|_{u_1=0} = \prod_{j=1}^s v_j \prod_{\substack{2 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} (u_i + v_j + \tau u_i v_j) \det \tilde{M}, \quad (\text{E.10})$$

con

$$\tilde{M}_{1,k} = \frac{1}{v_k} \prod_{i=2}^s u_i \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s (v_j v_k + \tau v_k + 1)}{\prod_{i=2}^s (u_i + v_k + \tau u_i v_k)}, \quad \tilde{M}_{j,k} = M_{j,k}, \quad \text{se } j > 1. \quad (\text{E.11})$$

Studiando la decomposizione in poli di $\tilde{M}_{1,k}$, si trova

$$\tilde{M}_{1,k} = M_{1,k} - \sum_{j=2}^s \frac{\prod_{i=2}^s u_i \prod_{i=1}^s (1 - v_i u_j)}{u_j \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^s (u_i - u_j)} M_{j,k}. \quad (\text{E.12})$$

Ciò implica che $\det M = \det \tilde{M}$ e, dunque,

$$R_s(\{u\}, \{v\}) \Big|_{u_1=0} = L_s(\{u\}, \{v\}) \Big|_{u_1=0}. \quad (\text{E.13})$$

Per le considerazioni precedenti, questo conclude la dimostrazione dell'identità (E.1).

Appendice F

Densità di segmenti vuoti sul bordo

Consideriamo il modello a sei vertici su un reticolo quadrato con s linee orizzontali e N linee verticali; imponiamo condizioni al contorno a parete di dominio parziali, in modo che, stavolta, gli spigoli esterni liberi siano quelli in basso. La funzione di partizione del modello (legata a quella calcolata nella sezione 5.8 da una trasformazione di *crossing*) è data da

$$Z_{N,s}^{parz} = \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq N} Z_{r_1, \dots, r_s}^{top}. \quad (\text{F.1})$$

In questa appendice calcoleremo la densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore del reticolo, nel limite di *scaling*, nel regime $\Delta = 0$. Tale quantità può essere ottenuta valutando la configurazione r_1, \dots, r_s che dà il contributo massimo a $Z_{N,s}^{parz}$. La primitiva della densità è la forma limite del modello valutata in prossimità del bordo. Per il calcolo utilizzeremo tecniche mutuete dalla teoria dei modelli di matrici aleatorie [75, 76].

Consideriamo la rappresentazione (5.95): valutando per $\Delta = 0$, possiamo riscrivere (F.1) come

$$Z_{N,s}^{parz} = c^s \prod_{j=1}^s a(\lambda, \nu_j)^{N-1} \prod_{1 \leq j < k \leq s} \frac{t_j t_k + 1}{t_k - t_j} \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq N} \det_{1 \leq j, k \leq s} t_j^{r_k - 1}. \quad (\text{F.2})$$

Per valutare il limite omogeneo, poniamo $t_k = ty_k$ e facciamo tendere y_k a 1, $k = 1, \dots, s$. Applicando la procedura riportata in appendice C, si trova

$$\begin{aligned} Z_{N,s}^{parz} &= \frac{c^s a^{s(N-1)}}{t^{\frac{s(s+1)}{2}}} (1+t^2)^{\frac{s(s-1)}{2}} \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq N} \prod_{j=1}^s t^{r_j} \det_{1 \leq j, k \leq s} \begin{pmatrix} r_j - 1 \\ k - 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{c^s a^{s(N-1)}}{t^{\frac{s(s+1)}{2}}} (1+t^2)^{\frac{s(s-1)}{2}} \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq N} \prod_{j=1}^s t^{r_j} \Delta_s(\vec{r}). \quad (\text{F.3}) \end{aligned}$$

Dal momento che siamo interessati solo alla dipendenza da r_1, \dots, r_s , possiamo scrivere

$$Z_{N,s}^{parz} \propto \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_s \leq N} \exp(-s^2 S_{r_1, \dots, r_s}), \quad (\text{F.4})$$

dove abbiamo introdotto la funzione

$$S_{r_1, \dots, r_s} = -\frac{\ln t}{s^2} \sum_{j=1}^s r_j - \frac{1}{2s^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^s \ln |r_k - r_j|. \quad (\text{F.5})$$

Il limite di *scaling* è realizzato imponendo $N, s, j, r_j \rightarrow \infty$ in modo tale che

$$\frac{N}{s} \rightarrow R > 1, \quad \frac{j}{s} \rightarrow u \in [0, 1], \quad \frac{r_j}{s} \rightarrow r(u) \in [0, R]. \quad (\text{F.6})$$

Le sommatorie in (F.5) possono essere interpretate come somme di Riemann che, nel limite di *scaling*, convergono ad integrali, $\frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \rightarrow \int_0^1 du$.

Definiamo la densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore,

$$\rho(r_j) := \frac{1}{r_{j+1} - r_j}, \quad (\text{F.7})$$

che, nel limite di *scaling*, diventa

$$\rho(r(u)) = \frac{1}{r'(u)}. \quad (\text{F.8})$$

A causa del vincolo $r_{j+1} - r_j \geq 1$, $j = 1, \dots, s-1$, si ha

$$\rho(r) \leq 1. \quad (\text{F.9})$$

Poiché $\int_0^1 du = 1$, la densità soddisfa anche la relazione

$$\int_0^R \rho(r) dr = 1. \quad (\text{F.10})$$

In virtù di (F.5), possiamo interpretare (F.4) come la funzione di partizione di un gas unidimensionale di particelle che si respingono tramite un'interazione logaritmica nella distanza, confinate in una buca di potenziale infinita di larghezza R e con il fondo inclinato con pendenza $-\ln t$. Il limite di *scaling* corrisponderà al limite termodinamico del gas unidimensionale. In questo limite, la discretezza dello spazio delle configurazioni si traduce nel vincolo (F.9).

Al variare del parametro t , si hanno le seguenti possibilità.

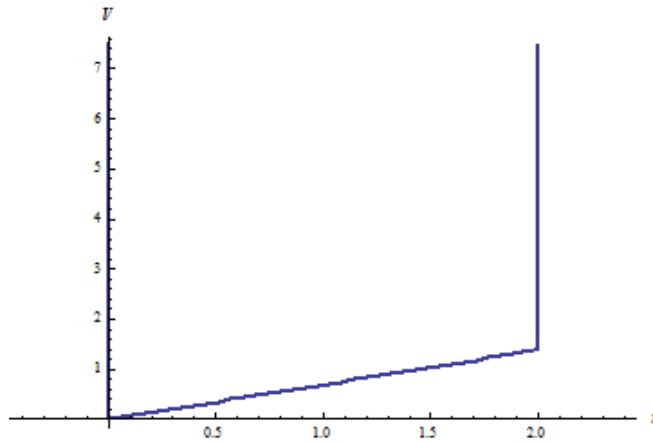


Figura F.1: Buca di potenziale infinita compresa tra 0 e $R = 2$ con il fondo con pendenza $\ln 2$, corrispondente a $t = \frac{1}{2}$.

- $t < 1$: il potenziale ha il minimo in $r = 0$, verso il quale si accumulano le particelle. In virtù del vincolo (F.9), ci aspettiamo una saturazione della densità; avremo, dunque, un comportamento del tipo

$$\rho(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in [0, \alpha], \\ 0 < \rho(r) < 1 & \text{se } r \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{se } r \in [\beta, R]. \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

Questo corrisponderà al profilo di densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore del reticolo (ricordiamo che l'asse orizzontale del reticolo è orientato da destra verso sinistra).

- $t > 1$: le particelle sono attratte verso il punto $r = R$. La situazione è identica al caso precedente, a meno di una riflessione rispetto all'asse $r = \frac{R}{2}$.
- $t = 1$: la buca di potenziale ha fondo piatto e le particelle, confinate in $[0, R]$, sono sottoposte alla sola repulsione logaritmica. Ci aspettiamo, pertanto, che vadano ad accumularsi verso le due pareti in maniera simmetrica.

Di seguito, considereremo solo il caso con $t < 1$, dato che, se $t > 1$, la densità può essere ottenuta tramite la sostituzione $r \rightarrow R - r$, $\alpha \rightarrow R - \beta$ e $\beta \rightarrow R - \alpha$.

La configurazione di bordo che rende massima $Z_{N,s}^{parz}$ può essere ottenuta, nel limite di *scaling*, tramite un'analisi di punto-sella. Se indichiamo con \int_0^R l'integrale in parte principale, la (F.5) diventa

$$S[\rho] = -\ln t \int_0^R r \rho(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^R \ln |r - r'| \rho(r) \rho(r') dr dr'. \quad (F.12)$$

La condizione di stazionarietà, con la condizione (F.10), è

$$\delta \left\{ S[\rho] + \lambda \left[\int_0^R \rho(r) dr - 1 \right] \right\} = 0, \quad (F.13)$$

dove λ è un moltiplicatore di Lagrange; si ha quindi

$$-r \ln t - \int_0^R \ln |r - r'| \rho(r') dr' + \lambda = 0. \quad (F.14)$$

Derivando rispetto a r , si ottiene l'equazione di punto sella,

$$\int_0^R \frac{\rho(r')}{r - r'} dr' = -\ln t. \quad (F.15)$$

Per risolverla si segue la procedura riportata in [15],[77]-[79], imponendo il comportamento (F.11): si trova,

$$\rho(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in [0, \alpha], \\ \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{\alpha(\beta-r)}}{\sqrt{\beta(r-\alpha)}} \right) & \text{se } r \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{se } r \in [\beta, R], \end{cases} \quad (F.16)$$

con

$$\alpha = \frac{1-t}{1+t}, \quad \beta = \frac{1+t}{1-t}. \quad (F.17)$$

Chiaramente, si deve avere $R > \beta$; in caso contrario, ossia $R < \frac{1+t}{1-t}$, la soluzione (F.16) non è accettabile. Si considera allora un nuovo scenario in cui si creano due regioni di saturazione della densità, una intorno a $r = 0$ e l'altra intorno a $r = R$. Imponendo che $\rho(r) = 1$ se $r \in [0, \alpha'] \cup [\beta', R]$, si trova [79]

$$\rho(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in [0, \alpha'], \\ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{\alpha'(\beta'-r)}}{\sqrt{\beta'(r-\alpha')}} \right) - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{(R-\alpha')(\beta'-r)}}{\sqrt{(R-\beta')(r-\alpha')}} \right) & \text{se } r \in [\alpha', \beta'], \\ 1 & \text{se } r \in [\beta', R], \end{cases} \quad (F.18)$$

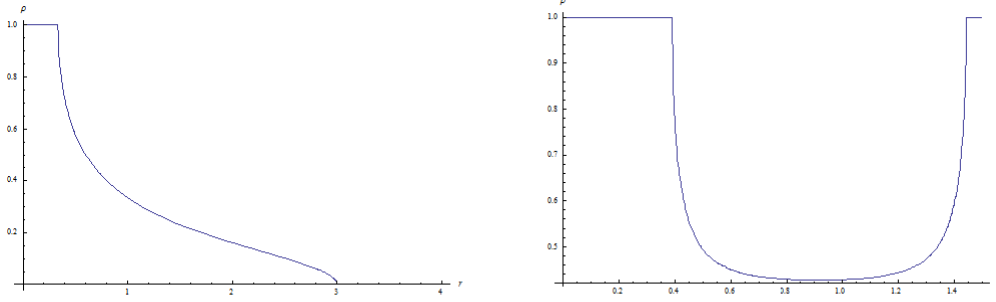


Figura F.2: Profilo di densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore nel limite di *scaling*, valutato per $t = \frac{1}{2}$: a sinistra, lo scenario (F.16) con $R = 4$, a destra, lo scenario (F.18) con $R = \frac{3}{2}$.

dove

$$\alpha' = \frac{(\sqrt{R+1} - \sqrt{(R-1)t})^2}{2(1+t)}, \quad \beta' = \frac{(\sqrt{R+1} + \sqrt{(R-1)t})^2}{2(1+t)}. \quad (\text{F.19})$$

Le espressioni (F.16) e (F.18) corrispondono ai due possibili scenari per il profilo di densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore del reticolo, nel limite di *scaling*, per il modello con $\Delta = 0$.

Ricordiamo la definizione (5.121) di funzione altezza e imponiamone valori corrispondenti a quelli riportati in figura 5.3 sul bordo superiore, su quello destro e su quello sinistro del reticolo qui considerato. Dal momento che gli spigoli sul bordo inferiore sono liberi, il valore della funzione altezza su tale bordo è determinato dallo stato del sistema. Il limite di *scaling* della funzione altezza, ovvero la forma limite, è definito come

$$\mathfrak{h}(X, Y) := \lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{h}_N(\lceil XN \rceil, \lceil YN \rceil), \quad X \in [0, 1], \quad Y \in \left[0, \frac{1}{R}\right], \quad (\text{F.20})$$

dove $\lceil \cdot \rceil$ indica la parte intera superiore di un numero reale. Si noti che la variabile X e la variabile r sono legate da

$$r = \lceil RX \rceil. \quad (\text{F.21})$$

La densità di segmenti vuoti sul bordo inferiore ottenuta in precedenza è tale che

$$\frac{d\mathfrak{h}\left(X, \frac{1}{R}\right)}{dX} = 1 - \rho(RX). \quad (\text{F.22})$$

Integrando questa equazione si ottiene il profilo della forma limite in corrispondenza del bordo inferiore del reticolo.

Bibliografia

- [1] P.W. Kasteleyn, *The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice*, Physica **27** (1961), 1209–1225.
- [2] H. N. V. Temperley, M. E. Fisher, *Dimer problem in statistical mechanics – an exact result*, Phil. Mag. **6** (1961), 1061–1063.
- [3] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), 111–132; 219–234.
- [4] W. Jockush, J. Propp, P. Shor, *Random domino tilings and the arctic circle theorem*, (1995), arXiv:math.CO/9801068.
- [5] S. V. Kerov, A. M. Vershik, *Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux*, Sov. Math. Dokl. **18** (1977), 527–531.
- [6] B. Nienhuis, H.J. Hilhorst, and H.W. Bloete, *Triangular SOS models and cubic-crystal shapes*, J. Phys. A: Math. Gen. **17** (1984), 3559–3581.
- [7]] R. Cerf and R. Kenyon, *The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model*, Commun. Math. Phys. **222** (2001), 147–179, arXiv: math/0208125.
- [8] P. L. Ferrari and H. Spohn, *Step fluctuations for a faceted crystal*, J. Stat. Phys. **113** (2003),
- [9] H. Cohn, M. Larsen, and J. Propp, *The shape of a typical boxed plane partition*, New York J. Math. **4** (1998), 137–165, arXiv: math/9801059
- [10] A. Okounkov and N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 581–603, available at math/0107056 1–46, arXiv: cond-mat/0212456.

- [11] R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and amoebae*, Ann. of Math. (2) **163** (2003), no. 3, 1019–1056.
- [12] R. Kenyon, A. Okounkov, *Planar dimers and Harnack curves*, Duke Math. J. **131** (2004), no. 3, 499–524.
- [13] R. Kenyon, A. Okounkov, *Limit shapes and the complex Burgers equation*, (2007), arXiv:math-ph/0507007.
- [14] V. E. Korepin, P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions*, J. Phys. A **33** (2000), 7053–7066, arXiv:cond-mat/0004250.
- [15] P. Zinn-Justin, *Six-vertex model with domain wall boundary conditions and one-matrix model* Phys. Rev. E **62** (2000), 3411-3418.
- [16] P. Zinn-Justin, *The influence of boundary conditions in the six-vertex model*, (2002), arXiv:cond-mat/0205192.
- [17] K. Palamarchuk and N. Reshetikhin, *The six-vertex model with fixed boundary conditions*, PoS (Solvay) (2008), 012.
- [18] F. Colomo, A. G. Pronko, *The arctic curve of the domain-wall six-vertex model*, J. Stat. Phys. **138** (2010), 662–700, arXiv:0907.1264
- [19] F. Colomo, A. G. Pronko, P. Zinn-Justin, *The arctic curve of the domain wall six-vertex model in its antiferroelectric regime*, J. Stat. Mech. Theory Exp. 3 L03002 (2010), 11.
- [20] N. Reshetikhin, A. Sridhar, *Integrability of limit shapes of the six-vertex model*, (2015), arXiv:1510.01053
- [21] A. Giuliani, V. Mastropietro, F.L. Toninelli, *Height fluctuations in interacting dimers*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probability and Statistics, (2015), arXiv:1406.7710.
- [22] F. Colomo, A. Sportiello, *Arctic curve of the six-vertex model on generic domains: the Tangent Method*, (2016), arXiv:1605.01388.
- [23] N. Reshetikhin, A. Sridhar, *Limit shapes of the stochastic six vertex model*, (2016), arXiv:1609.01756.
- [24] A. Borodin, I. Corwin, V. Gorin, *Stochastic six-vertex model*, Duke Math. J. **165** (2016), 563–624, arXiv:1407.6729.

- [25] A. Borodin, L. Petrov, *Higher spin six vertex model and symmetric rational functions*, (2016), arXiv:1601.05770.
- [26] A. Giuliani, V. Mastropietro, F. L. Toninelli, *Haldane relation for interacting dimers*, (2016), arXiv:1612.01274.
- [27] H. Cohn, N. Elkies, J. Propp, *Local statistics for random domino tilings of the Aztec diamond*. Duke Math. J. **85** (1996), 1, 117–166.
- [28] D. Mackenzie, *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Vol.7 (2009), American Mathematical Society.
- [29] N. Allegra, J. Dubail, J. M. Stephan, J. Viti, *Inhomogeneous field theory inside the arctic circle*,(2015), arXiv:1512.02872.
- [30] F. Franchini, *An introduction to integrable techniques for one-dimensional quantum systems*, (2016), arXiv:1609.02100.
- [31] T. Antal, Z. Racz, A. Rakos, G. M. Schutz, *Transport in the XX chain at zero temperature: Emergence of flat magnetization profiles*, Phys. Rev. E**59** (1999) 4912.
- [32] W. F. Giauque, J. W. Stout, *The Entropy of Water and the Third Law of Thermodynamics. The Heat Capacity of Ice from 15 to 273°K*, J. Am. Chem. Soc. **58**(1936), 1144-1150.
- [33] E. H. Lieb, *Residual Entropy of Square Ice*, Phys. Rev. **162**(1967), 162-172.
- [34] L. Pauling, *The Structure and Entropy of Ice and Other Crystals with some Randomness of Atomic Arrangement*, J. Am. Chem. Soc. **57**(1935), 2680.
- [35] G. Algara-Siller, O. Lehtinen, F. C. Wang, R. R. Nair, U. Kaiser, H. A. Wu, A. K. Geim, and I. V. Grigorieva, Nature (London) **519** (2015), 443 .
- [36] C. Domb, M. S. Green, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol.1, Academic Press, London, 1972.
- [37] L. J. Heyderman, R. L. Stamps, J. Phys Cond. Matt. **25** (2013), 363201.
- [38] C. Nisoli, R. Moessner, P. Schiffer, Rev. Mod. Phys. **85** (2013), 1473.
- [39] J. P. Morgan et al., Phys. Rev. B **87** (2013), 024405.

- [40] A. Farhan et al., *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013), 057204.
- [41] L. Cugliandolo, *Artificial spin-ice and vertex models*, (2017), arXiv:1701.02283.
- [42] N. Reshetikhin, *Lectures on the integrability of the 6-vertex model*, Les-Houches lecture notes, (2008), arXiv:1407.3367.
- [43] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic press, San Diego, 1982.
- [44] V. L. Berezinskii, *Destruction of long range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group*, *Sov. Phys. JETP*, **32** (1970), 493.
- [45] J. M. Kosterlitz, D.J.Thouless, *Ordering, metastability and phase transitions in twodimensional systems*, *J. Phys. C* **6** (1973), 1181.
- [46] K. Eloranta, *Diamond ice*, *J. Stat. Phys.* **96** (1999), 1091–1109.
- [47] V. E. Korepin, *Calculations of norms of Bethe wave functions*, *Commun. Math. Phys.* **86** (1982), 391–418.
- [48] P. Bleher and K. Liechty, *Random Matrices and the Six-Vertex Model (CRM Monograph)*, American Mathematical Society, 2014.
- [49] O. F. Syljuåsen, M. B. Zvonarev, *Monte-Carlo simulations of vertex models*, *Phys. Rev. E* **70** (2004), 016118, arXiv:cond-mat/0401491.
- [50] D. Allison, N. Reshetikhin, *Numerical study of the 6-vertex model with domain wall boundary conditions*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), 1847–1869, arXiv:condmat/ 0502314.
- [51] L. F. Cugliandolo, G. Gonnella, A. Pelizzola, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* **6** (2015), 06008, arXiv:1501.00883 [cond-mat.stat-mech].
- [52] I. Lyberg, V. E. Korepin, J. Viti, *The density profile of the six vertex model with domain wall boundary conditions*, (2016), arXiv:1612.06758 [cond-mat.stat-mech].
- [53] R. Keesman, J. Lamers, *A numerical study of the F-model with domain-wall boundaries*, (2017), arXiv:1702.05474.
- [54] V.I.Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, First Edition 1978, Second Edition 1989.

- [55] B. Sutherland, *Beautiful Models: 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*, World Scientific, Singapore, 2004.
- [56] J.S. Caux and J. Mossel, *J. of Stat. Mech.: Theory and Experiment* 2011.02 P02023 (2011).
- [57] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle - I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, *Zeitschrift für Physik* **71** (1931), 205–226.
- [58] E.H. Lieb, W. Liniger, *Phys. Rev.* **130**, 16005 (1963).
- [59] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [60] L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*, arXiv:hep-th/9605187 (1996).
- [61] A. G. Izergin, *Partition function of the six-vertex model in the finite volume*, *Sov. Phys. Dokl.* **32** (1987), 878–879.
- [62] A. G. Izergin, D. A. Coker, V. E. Korepin, *Determinant formula for the six-vertex model*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** (1992), 4315–4334.
- [63] N. M. Bogoliubov, A. G. Pronko, M. B. Zvonarev, *Boundary correlation functions of the six-vertex model*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 5525–5541.
- [64] F. Colomo, A. G. Pronko, *On two-point boundary correlations in the six-vertex model with domain wall boundary conditions*, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* (2005), P05010, arXiv:math-ph/0503049.
- [65] F. Colomo, A. G. Pronko, *Emptiness formation probability in the domain-wall six-vertex model*, *Nucl. Phys. B* **798** (2008), 340–362, arXiv:0712.1524.
- [66] F. Colomo, A. G. Pronko, *On the problem of calculation of correlation functions in the six-vertex model with domain wall boundary conditions*, (2011), arXiv:1111.4353.
- [67] K. Motegi, *Boundary correlation functions of the six and nineteen vertex models with domain wall boundary conditions*, *Phys. A* **390** (2011), no. 20, 3337–3347, arXiv:1101.0187.

- [68] F. Colomo, A.G. Pronko, A. Sportiello, *Generalized emptiness formation probability in the six-vertex model*, J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016).
- [69] N. Kitanine, J.-M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, *Spin-spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **641** (2002), 487–518, arXiv: hep-th/0201045.
- [70] O. Foda, M. Wheeler, *Partial domain wall partition functions*, JHEP Vol. 2012 No. **7** (2012), 186, arXiv:1205.4400.
- [71] C. A. Tracy, H. Widom, *Integral formulas for the asymmetric simple exclusion process*, Commun. Math Phys. **279** (2008), 815–844, arXiv:0704.2633.
- [72] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., American Colloquium Publications, vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.
- [73] F. Colomo, A. G. Pronko, *The role of orthogonal polynomials in the six-vertex model and its combinatorial applications*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), arXiv:mathph/0602033.
- [74] L. Cantini, Comunicazione personale (giugno 2015).
- [75] M.L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, 1967.
- [76] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, *Planar diagrams*, Communications in Mathematical Physics **59** (1978), no. 1, 35-51.
- [77] E. Brezin, V. Kazakov, *Universality of correlations of levels with discrete statistics*, Comm. Math. Phys. **214** (2000), 233–247.
- [78] P. Di Francesco, N. Reshetikhin, *Asymptotic shapes with free boundaries*, (2009), arXiv:0908.1630.
- [79] F. Colomo, A. G. Pronko, *Third-order phase transition in random tilings*, Phys. Rev. E **88** (2013), 042125, arXiv:1306.6207.

Ringraziamenti

Al termine di questa tesi desidero esprimere la mia gratitudine verso coloro che ne hanno contribuito alla realizzazione.

Prima di tutto ringrazio il professor Filippo Colomo per avermi dato l'opportunità di lavorare su un argomento così stimolante, per aver chiarito ogni mio dubbio e per avermi guidato nella stesura dell'elaborato. Lo ringrazio anche (e soprattutto) per la sua gentilezza, la sua disponibilità, la sua pazienza e i suoi preziosi consigli.

Ringrazio anche il professor Luigi Cantini per aver messo a disposizione alcuni suoi risultati prima della pubblicazione e il professor Andrei Pronko per le utili indicazioni.

Ringrazio tutti i colleghi della stanza 282 per le discussioni più o meno professionali e per il piacevole tempo trascorso durante la preparazione della tesi e tutti gli amici che, anche con una sola parola, hanno tifato per me. In particolare, per il supporto nei momenti difficili, ringrazio Stefano, Francesco, Gianluca, Mirco e Giulia.

Ringrazio di cuore i miei genitori, Rocco e Giuliana, per il loro affetto incondizionato e per il loro appoggio durante tutto il percorso universitario.

Un ringraziamento speciale va a Francesca, per aver camminato al mio fianco in questi anni, in questi mesi e in queste ultime intense settimane e per avermi fatto vedere luci anche dove vedevo solo ombre.