



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Specialistica in
SCIENZE FISICHE E ASTROFISICHE

Struttura e proprietà di entanglement dello stato fondamentale nella catena di spin di Razumov-Stroganov

Candidato:

Leonardo Banchi

30 Settembre 2008

Relatore:

Dr. Filippo Colomo

Correlatore:

Dr. Andrea Cappelli

Anno Accademico 2007/2008

Indice

1	Introduzione e sommario	1
2	Modello di Razumov-Stroganov	6
2.1	Sistemi magnetici	6
2.2	Modelli unidimensionali di spin $\frac{1}{2}$	7
2.3	Modello XXZ	10
2.3.1	Hamiltoniana XXZ	10
2.3.2	Integrazione di \mathcal{H}_{XXZ}	13
2.3.3	Stato fondamentale	14
2.3.4	Matrici a segno alterno e modello a sei vertici	16
2.4	Le congetture di Razumov-Stroganov	17
2.4.1	Il modello	17
2.4.2	Le congetture	19
2.4.3	Considerazioni sulle congetture	21
2.5	Studio dello stato di Razumov-Stroganov	23
3	Entanglement	25

3.1	Stati puri	26
3.2	Stati misti	27
3.3	Quantificare l'entanglement	29
3.3.1	Informazione classica e quantistica	30
3.3.2	Entanglement in stati puri	32
3.3.3	Entanglement in stati misti	33
3.3.4	Sistemi di <i>qubits</i>	34
3.4	Entanglement multipartito	37
3.4.1	Esempio: sistema di tre qubits	39
3.5	Entanglement in catene di spin	40
3.5.1	Quantificare l'entanglement in catene di spin	43
4	Studio dell'hamiltoniana di Razumov-Stroganov	48
4.1	Algebra di Temperley-Lieb	50
4.1.1	Rappresentazione grafica dell'algebra di Temperley-Lieb	52
4.1.2	Stato di Razumov-Stroganov	56
4.1.3	Connessione con la catena XXZ	56
4.1.4	Formula ricorsiva per il calcolo dello stato di Razumov-Stroganov	58
4.2	Modello supersimmetrico su reticolo di fermioni "hard-core"	61
4.2.1	Meccanica quantistica supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$	62
4.2.2	Modello supersimmetrico su reticolo	64
4.2.3	Connessione con la catena XXZ	66

5	Entanglement nello stato di Razumov-Stroganov	72
5.1	Entanglement tra primi vicini	72
5.2	Procedimento numerico per il calcolo dell'entanglement	74
5.2.1	Calcolo dello stato di Razumov-Stroganov	75
5.2.2	Calcolo delle funzioni di correlazione	76
5.2.3	Calcolo della matrice densità ridotta	77
5.3	Funzioni di correlazione	78
5.4	Entanglement	82
5.5	Entropia di Von Neumann	84
5.6	Configurazioni degli spin	88
5.7	Considerazioni conclusive	92
A	Algoritmi per i calcoli numerici	94
A.1	Calcolo dello stato fondamentale	94
A.2	Calcolo delle funzioni di correlazione traverse	95
A.3	Calcolo della matrice densità ridotta	97
B	Funzioni di correlazione dello stato di Razumov-Stroganov	98

CAPITOLO 1

Introduzione e sommario

Questo lavoro di tesi è dedicato allo studio dello stato fondamentale di un modello di N spin $\frac{1}{2}$ interagenti, distribuiti su un reticolo unidimensionale (catena). L'interazione, a corto raggio e non isotropa nello spazio dei momenti angolari, è descritta dall'hamiltoniana di Heisenberg XXZ con anisotropia di scambio Δ lungo l'asse di quantizzazione pari a $-\frac{1}{2}$.

Il modello appartiene ad una classe di modelli di spin particolarmente rilevanti nello studio dei sistemi fisici a molti corpi interagenti. Da un punto di vista teorico, infatti, l'interazione uniforme e a corto raggio, il piccolo valore dello spin, e la bassa dimensionalità del reticolo, permettono di sviluppare metodi di risoluzione esatta e tecniche numeriche che forniscono informazioni dettagliate sul comportamento del sistema. D'altra parte, questi modelli sono da tempo utilizzati per descrivere le proprietà magnetiche di molti sistemi reali ed interpretarne i dati sperimentali, che rendono conto di una fenomenologia ricca e complessa.

Più recentemente, le catene di spin $\frac{1}{2}$ hanno suscitato grande interesse anche

nell'ambito della teoria dell'informazione quantistica, in relazione alla possibile realizzazione di dispositivi quantistici non solo, o non tanto, mediante sistemi magnetici veri e propri, ma anche tramite sistemi fisici di tipo completamente diverso, dalle microcavità ottiche [1] ai *quantum dots* [2], in cui i gradi di libertà e le interazioni rilevanti ai fini della computazione quantistica sono efficacemente descritti dai modelli di spin $\frac{1}{2}$ in questione. In alcune di queste realizzazioni, i parametri dell'hamiltoniana magnetica efficace dipendono da grandezze fisiche (frequenze laser, campi elettrici o magnetici applicati, ecc.) che possono essere variate e fissate con grande precisione, contrariamente al caso dei sistemi magnetici reali nei quali tali parametri caratterizzano il materiale e non possono essere modificati altrettanto liberamente.

Questa possibilità rende importanti, anche dal punto di vista applicativo, i modelli definiti da specifici valori dei parametri dell'hamiltoniana e per i quali si abbiano a disposizione risultati teorici esatti. Fra questi, il modello oggetto di questa tesi, ossia la catena di Heisenberg XXZ con $\Delta = -\frac{1}{2}$, numero N di siti finito e dispari e condizioni periodiche al contorno.

Le particolarità dello stato fondamentale di questo modello sono state evidenziate da Razumov e Stroganov nel 2000 [3] e da allora hanno suscitato un notevole interesse nella comunità scientifica che si occupa di modelli integrabili. Un calcolo analitico, per piccoli valori di N dispari, mostra infatti che, una volta decomposto tale stato sulla base in cui ogni spin ha componente definita lungo l'asse di quantizzazione, tutte le ampiezze di probabilità che compaiono nella decomposizione sono multipli

interi di quella che assume il valore minimo. Sulla base di questi risultati sono state poi formulate numerose congetture, molte delle quali tuttora indimostrate, che hanno evidenziato il carattere combinatorio di tali numeri interi.

Queste sono caratteristiche uniche per un sistema interagente. In generale infatti, la forma esplicita dello stato fondamentale è nota esattamente soltanto per sistemi liberi poiché è difficile da determinare, anche quando esistano metodi analitici o numerici per il calcolo esatto dei valori di aspettazione delle principali osservabili fisiche.

Un'ulteriore peculiarità di questo modello è che l'energia per spin dello stato fondamentale non ha correzioni di taglia finita: $E/N = -3/2$ esattamente.

Le proprietà dello stato osservato da Razumov e Stroganov fanno quindi presupporre che per $\Delta = -\frac{1}{2}$ sia possibile una descrizione della catena con nuovi gradi di libertà “non interagenti” in termini dei quali lo stato fondamentale assuma una forma particolarmente semplice ed il calcolo delle sue componenti si riduca ad un puro conteggio combinatorio.

È importante sottolineare a tale riguardo che il valore del parametro $\Delta = -\frac{1}{2}$ non comporta, almeno apparentemente, alcuna simmetria addizionale dell'hamiltoniana; in effetti il modello si trova ben all'interno della classe di universalità dei sistemi magnetici XXZ con $|\Delta| < 1$. Alla ricerca di eventuali ulteriori simmetrie nascoste, abbiamo dunque studiato le rappresentazioni dell'hamiltoniana XXZ in termini dei generatori dell'algebra di Temperley-Lieb, evidenziando le semplificazioni che si hanno per $\Delta = -\frac{1}{2}$. Abbiamo inoltre studiato un modello supersimmetrico su reticolo,

i cui gradi di libertà possono essere espressi in termini degli spin della catena XXZ con Δ esattamente uguale a $-\frac{1}{2}$; abbiamo quindi analizzato le proprietà dello stato fondamentale che possono essere dedotte da questa corrispondenza.

Fra le catene di Heisenberg di spin $\frac{1}{2}$ esiste un altro modello [4] il cui stato fondamentale, in corrispondenza di un preciso valore di un parametro dell'hamiltoniana, ha struttura non banale, esplicitamente nota, e un'energia lineare nel numero di siti della catena. Anche per tale modello al valore del parametro (in questo caso il campo magnetico) in corrispondenza del quale lo stato fondamentale assume la forma di cui sopra, non corrisponde né un cambiamento della simmetria dell'hamiltoniana, e quindi della classe di universalità, né una rottura spontanea di una delle simmetrie evidenti dell'hamiltoniana, e quindi un punto critico. D'altra parte, le caratteristiche dello stato fondamentale di questo modello hanno recentemente trovato interpretazione in termini di proprietà di entanglement, il cui studio si è rivelato uno strumento efficace per la comprensione della struttura dello stato fondamentale di modelli interagenti su reticolo. Abbiamo quindi deciso di analizzare gli estimatori di entanglement alla ricerca di una spiegazione fisica della forma dello stato studiato da Razumov e Stroganov.

La struttura della tesi è la seguente:

Il capitolo 2 è dedicato alla descrizione dello stato analizzato da Razumov e Stroganov. Dopo un breve descrizione dei modelli magnetici unidimensionali, ci restringiamo alla catena di Heisenberg XXZ di spin $\frac{1}{2}$. Descriviamo brevemente le pro-

prietà del modello per valori di Δ generici, per poi specializzarci al caso $\Delta = -\frac{1}{2}$ ed enunciare quindi le congetture di Razumov e Stroganov sulla struttura combinatoria dello stato fondamentale.

Nel capitolo 3 introduciamo i principali concetti legati allo studio delle proprietà di entanglement nei sistemi magnetici.

Nel capitolo 4 studiamo la struttura dello stato di Razumov-Stroganov analizzando ulteriori possibili simmetrie dell'hamiltoniana XXZ con $\Delta = -\frac{1}{2}$, alla ricerca di nuovi gradi di libertà "fondamentali".

Nel capitolo 5 riportiamo i risultati originali dello studio delle proprietà di entanglement della catena di Razumov-Stroganov e le informazioni che tale studio permette di ottenere.

L'appendice A descrive in dettaglio il funzionamento dei programmi che hanno permesso il calcolo degli estimatori di entanglement dello stato di Razumov-Stroganov.

L'appendice B mostra invece i risultati del nostro calcolo esatto delle funzioni di correlazione dello stato di Razumov-Stroganov, necessarie per il calcolo di alcuni estimatori di entanglement.

CAPITOLO 2

Modello di Razumov-Stroganov

2.1 Sistemi magnetici

Le più rilevanti proprietà magnetiche nei sistemi a stato solido hanno origine dall'accoppiamento puramente elettrostatico fra gli elettroni del materiale. In particolare, nel caso di cristalli isolanti, tale accoppiamento, attraverso il meccanismo di scambio dovuto al principio di esclusione di Pauli, dà luogo ad un'interazione a corto raggio che può essere modellizzata in termini di operatori di spin localizzati associati a specifici ioni del cristallo, detti appunto *ioni magnetici*. Il modello che descrive tale interazione, nella grande maggioranza dei casi ed eventualmente in presenza di un campo magnetico esterno uniforme, è definito dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} (J_{jk}^x S_j^x S_k^x + J_{jk}^y S_j^y S_k^y + J_{jk}^z S_j^z S_k^z) - g\mu_B \vec{H} \cdot \sum_j \vec{S}_j, \quad (2.1)$$

in cui gli indici j, k individuano i siti del reticolo magnetico, \vec{S}_j sono i relativi operatori quantistici di spin, \vec{H} è il campo magnetico esterno uniforme, g è il fattore di Landé, μ_B è il magnetone di Bohr e \vec{J}_{jk} sono gli integrali di scambio.

Anche se in linea di principio i valori degli integrali di scambio sono determinati dai dettagli della struttura cristallina, di fatto essi vengono determinati sperimentalmente e l'espressione (2.1) assume quindi il ruolo di vera e propria hamiltoniana modello, indipendente dallo specifico sistema fisico cui si riferisce. Poiché in genere gli integrali di scambio dipendono solo dalla distanza $|j - k|$ e decrescono molto rapidamente con essa, si può far riferimento alla cosiddetta hamiltoniana di Heisenberg in cui l'interazione è limitata a soli primi vicini e $\vec{J}_{jk} = \vec{J} \delta_{j,k\pm 1}$.

Infine, anche se la struttura cristallina dei materiali è tridimensionale, molti di essi possono essere considerati di bassa dimensionalità per quanto riguarda le proprietà magnetiche. Si tratta di materiali in cui gli ioni magnetici sono fortemente accoppiati lungo una o due direzioni cristallografiche. Gli ioni magnetici appartenenti a catene o piani diversi sono ben separati da gruppi di atomi non magnetici e ne risulta quindi un'interazione magnetica uni- o bidimensionale.

2.2 Modelli unidimensionali di spin $\frac{1}{2}$

Consideriamo adesso un sistema di N spin $\frac{1}{2}$ localizzati sui siti di un reticolo unidimensionale (catena). Lo spazio di Hilbert del sistema totale è $H = \bigotimes_{j=1}^N H_j$, dove H_j è lo spazio di Hilbert di singolo sito, bidimensionale e isomorfo a \mathbb{C}^2 .

Ogni operatore di spin \vec{S}_j agisce in maniera non banale solo sul sottospazio H_j . Se scegliamo la base in cui S_j^z è diagonale, abbiamo $S_j^z |\uparrow_j\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow_j\rangle$ e $S_j^z |\downarrow_j\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow_j\rangle$. Nella rappresentazione $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gli operatori di spin di singolo sito sono

definiti in termini delle matrici di Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Più precisamente, si ha $\vec{S}_j = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_j$, dove gli operatori $\vec{\sigma}_j$ sono matrici $2^N \times 2^N$ che soddisfano l'algebra

$$[\sigma_j^\alpha, \sigma_k^\beta] = 2i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_{jk}\sigma_j^\gamma, \quad (2.3)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$ e $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ è il tensore totalmente antisimmetrico rispetto allo scambio di due dei suoi indici con $\epsilon^{xyz} = 1$.

È spesso conveniente riferirci all'orientamento dello spin di un sito reticolare tramite l'autovalore dell'operatore $(1 + \sigma_j^z)/2$; quindi $|\uparrow\rangle \equiv |1\rangle$, $|\downarrow\rangle \equiv |0\rangle$. Ogni stato dello spazio di Hilbert della catena, autovettore degli operatori σ_j^z , $j = 1, \dots, N$, è dunque rappresentabile tramite un numero binario di N cifre. Chiamiamo questa notazione *rappresentazione binaria*.

Fissata un'opportuna scala di energia K , poniamo $\vec{\Delta} = \frac{1}{4K}\vec{J}$, $\vec{h} = \frac{g\mu_B}{2K}\vec{H}$ e consideriamo condizioni periodiche al contorno $\vec{\sigma}_{N+1} = \vec{\sigma}_1$: l'hamiltoniana di Heisenberg adimensionale risulta quindi:

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=1}^N \left(\Delta^x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \Delta^y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta^z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \vec{h} \cdot \vec{\sigma}_j \right), \quad (2.4)$$

dove gli indici sono definiti modulo N e Δ^x , Δ^y , Δ^z , h^x , h^y , h^z sono parametri adimensionali con valori reali. L'hamiltoniana (2.4) è un operatore hermitiano che agisce sullo spazio di Hilbert \mathbb{C}^{2^N} .

Quando i tre integrali di scambio sono diversi tra loro si parla di *catena XYZ*;

i casi particolari $\Delta^x = \Delta^y = \Delta^z$, $\Delta^x = \Delta^y \neq \Delta^z$ e $\Delta^z \equiv 0$, invece, prendono il rispettivamente il nome di *catena XXX*, *catena XXZ* e *catena XY*; il caso $\Delta^x = \Delta^y = 0$ corrisponde al il modello di Ising quantistico.

Dai valori dei parametri $\vec{\Delta}$ dipende la simmetria dell'hamiltoniana e dunque la classe di universalità. L'appartenenza ad una data classe di universalità determina le proprietà generali della fenomenologia magnetica del modello, sia a temperatura T finita che a $T = 0$. In particolare, a $T = 0$, fornisce informazioni sullo stato fondamentale in termini di eventuale presenza di ordine a lungo raggio, e quindi dell'andamento con la distanza delle funzioni di correlazione. D'altra parte, la classe di universalità non fissa la struttura specifica dello stato fondamentale, la quale è in generale molto complicata e nota soltanto in alcuni casi. Tra questi alcuni sono banali (ad esempio gli stati perfettamente ferromagnetici), altri invece sono molto particolari.

Un caso interessante è stato evidenziato in [4] per la catena anti-ferromagnetica con $\Delta^x, \Delta^y, \Delta^z < 0$. Per ogni valore degli integrali di scambio e per ogni direzione del campo esterno, esiste un valore dell'ampiezza del campo h_N per cui lo stato fondamentale è fattorizzato, cioè esprimibile come prodotto tensoriale di stati di singolo spin. L'energia dello stato fondamentale è inoltre indipendente dal campo esterno e lineare nel numero di siti N della catena:

$$E_N = N (\Delta^x + \Delta^y + \Delta^z) \quad (2.5)$$

Sottolineiamo che questa proprietà è una conseguenza generale della fattorizzazione dello stato fondamentale. Fissata la direzione (Θ, Φ) del campo tale che $\vec{h}_N =$

$h_N(\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$ si ha la condizione

$$h_N = 2 \left[\frac{(\Delta^x + \Delta^y)(\Delta^y + \Delta^z)(\Delta^z + \Delta^x)}{(\Delta^y + \Delta^z) \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi + (\Delta^z + \Delta^x) \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi + (\Delta^x + \Delta^y) \cos^2 \Theta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Notiamo che il valore (2.6) non è in generale un punto critico, né determina una diversa simmetria dell'hamiltoniana e quindi il passaggio ad uno stato fattorizzato non avviene mediante una transizione di fase quantistica.

Concludiamo osservando che la fattorizzazione dello stato fondamentale, e la conseguente proprietà (2.5), sono il risultato di un'esatta compensazione nella competizione tra l'interazione di scambio e l'effetto del campo esterno.

2.3 Modello XXZ

2.3.1 Hamiltoniana XXZ

La catena XXZ di spin $\frac{1}{2}$, non è solo un modello utile per descrivere materiali reali, ma ha svolto anche un ruolo fondamentale nello sviluppo della tecnica del *Bethe Ansatz* e nella costruzione di soluzioni esatte per i modelli magnetici unidimensionali.

Ci soffermiamo adesso su alcune proprietà della catena XXZ con condizioni periodiche al contorno, limitandoci al caso di campo esterno nullo ($\vec{h} = 0$). A meno di un cambio nella scala dell'energia possiamo porre $\Delta^x = \Delta^y = 1$ e $\Delta^z \equiv \Delta$, che

viene chiamato parametro di anisotropia. Dunque,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{XXZ}} &= - \sum_{j=1}^N (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) = \\ &= - \sum_{j=1}^N (2 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + 2 \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z),\end{aligned}\tag{2.7}$$

dove abbiamo introdotto gli operatori $\sigma_j^\pm = \frac{1}{2} (\sigma_j^x \pm \sigma_j^y)$.

Elenchiamo adesso alcune proprietà di simmetria di \mathcal{H}_{XXZ} :

- Invarianza per rotazioni attorno all'asse z : \mathcal{H}_{XXZ} commuta con la magnetizzazione totale

$$S^z = \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j^z}{2}.\tag{2.8}$$

Gli autostati dell'hamiltoniana sono anche autostati della magnetizzazione.

Gli autovalori $-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}$ sono dunque buoni numeri quantici.

- Invarianza per riflessioni rispetto al piano xy : \mathcal{H}_{XXZ} commuta con l'operatore

$$\prod_{j=1}^N \sigma_j^x.\tag{2.9}$$

Lo spettro di \mathcal{H} è quindi simmetrico in S^z : si hanno coppie di autovalori con stessa energia ed un valore opposto di S^z .

- Invarianza per traslazioni: \mathcal{H}_{XXZ} commuta con l'operatore di traslazione di un sito

$$\mathcal{T} = \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1 + \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_{j+1}}{2} = \left(\frac{1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{2} \right) \left(\frac{1 + \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3}{2} \right) \dots \left(\frac{1 + \vec{\sigma}_{N-1} \cdot \vec{\sigma}_N}{2} \right).\tag{2.10}$$

Poiché $\mathcal{T}^N = 1$ gli autovalori t di \mathcal{T} sono $e^{\frac{2\pi in}{N}}$, dove $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Dato l'autovalore t dell'operatore di traslazione, si definisce l'impulso P dello stato tramite $t = e^{iP}$. Gli autostati dell'hamiltoniana (2.7) hanno quindi un determinato valore dell'impulso $P = \frac{2\pi n}{N}$, definito modulo 2π .

Notiamo inoltre che l'hamiltoniana (2.7) è invariante per una riflessione del reticolo.

Infine, se il numero di siti è pari, l'hamiltoniana \mathcal{H}_{XXZ} possiede un'ulteriore simmetria: si può considerare la trasformazione unitaria U_Y , evidenziata da Yang e Yang [5], che ruota i soli spin dei siti dispari di un angolo π attorno all'asse z , lasciando immutati gli spin dei siti pari. Questa trasformazione porta $\mathcal{H}_{XXZ}(\Delta)$ in $-\mathcal{H}_{XXZ}(-\Delta)$, mettendo in relazione hamiltoniane con parte trasversa di segno opposto.

Al variare del parametro Δ l'hamiltoniana (2.7), anche se in campo nullo, descrive modelli con proprietà magnetiche molto diverse.

Il sistema appartiene alla classe di universalità Ising per $|\Delta| > 1$ ed a quella XX per $|\Delta| < 1$. Quando $\Delta = 1$ il modello prende il nome di ferromagnete di Heisenberg (XXX); per $\Delta = -1$ si ha invece l'anti-ferromagnete di Heisenberg, mentre il punto a $\Delta = 0$ è detto XX *puro*.

Nel caso unidimensionale per $T > 0$, sistemi descritti dall'hamiltoniana di Heisenberg in assenza di campo esterno non presentano ordine a lungo raggio. Soltanto a $T = 0$ la classe di universalità diviene rilevante e lo stato fondamentale assume conseguentemente proprietà diverse a seconda del valore di $\Delta^x, \Delta^y, \Delta^z$.

In particolare, nel caso dell'hamiltoniana (2.7) a $T = 0$ si ha:

Per $\Delta > 1$ la catena si trova in fase ferromagnetica di Ising: lo stato fondamentale è saturato con tutti gli spin allineati in direzione z o $-z$. I due stati sono caratterizzati da $S^z = \pm \frac{N}{2}$ mentre l'energia è lineare in Δ e N [6].

Per $\Delta < -1$ la catena si trova invece in fase anti-ferromagnetica di Ising. Classicamente le configurazioni di minima energia per il sistema descritto da (2.7) sono i due stati di Néel, in cui gli spin sono allineati lungo l'asse z alternandosi in verso. Quantisticamente invece la struttura dello stato fondamentale è più complessa, per la presenza degli operatori σ^+ , σ^- ; la forma dello stato fondamentale non è nota per Δ generico. Nel limite $\Delta \rightarrow -\infty$ il modello descrive un anti-ferromagnete di Ising e per N pari lo stato fondamentale diventa $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\dots\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\dots\downarrow\uparrow\rangle)$.

Per $-1 < \Delta < 1$ il sistema si trova in fase paramagnetica, cioè non ordinata. Con metodi sia di teoria delle perturbazioni che di Bethe Ansatz e teoria dei campi è stato stabilito che lo stato fondamentale ha qualitativamente le stesse proprietà che per $\Delta = 0$. Per $\Delta = 0$ la catena è equivalente ad un sistema unidimensionale di fermioni liberi (tramite la trasformazione di Jordan-Wigner) e le funzioni di correlazione mostrano un decadimento a potenza; la catena di Heisenberg è dunque in fase critica nel caso $\Delta < 1$.

2.3.2 Integrazione di \mathcal{H}_{XXZ}

La catena XXZ appartiene ad un'ampia classe di modelli integrabili tramite la tecnica nota come *Bethe Ansatz*.

Lo schema risolutivo del *Bethe Ansatz* è piuttosto elaborato e permette di ottenere autovalori e autovettori dell'hamiltoniana in funzione degli impulsi di opportune quasi-particelle. Descriviamo brevemente alcuni punti specializzandoci all'hamiltoniana (2.7); rimandiamo a [6, 7] per i dettagli.

Gli autostati di \mathcal{H}_{XXZ} sono formati da una combinazione di stati con un valore fissato di S^z ,

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha} |\alpha\rangle, \quad (2.11)$$

dove $|\alpha\rangle$ rappresenta uno stato con $\frac{N}{2} + S^z \equiv n$ spin su e $\frac{N}{2} - S^z$ spin giù.

Secondo il *Bethe Ansatz*, i coefficienti Ψ_{α} dell'autostato sono dati in termini degli impulsi p_j ($j = 1, \dots, n$) di quasi-particelle, i quali devono soddisfare il sistema di *equazioni di Bethe*

$$e^{iNp_j} = (-1)^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{e^{ip_j}}{e^{ip_k}} \cdot \frac{e^{ip_k} + e^{-ip_j} - 2\Delta}{e^{ip_j} + e^{-ip_k} - 2\Delta} \right) \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

L'autostato così costruito viene chiamato *stato di Bethe* ed ha impulso totale $P = \sum_{j=1}^n p_j$ ed energia

$$E(p_1, \dots, p_n) = (4n - N)\Delta - 4 \sum_{j=1}^n \cos(p_j). \quad (2.13)$$

2.3.3 Stato fondamentale

In generale le radici di Bethe, soluzioni delle equazioni (2.12), non sono esplicitamente note. Si può però dimostrare che nello stato fondamentale gli impulsi sono massimamente compatti e distribuiti simmetricamente intorno all'origine (dunque

$P = 0$), ma l'espressione per i p_j non è data in forma esplicita per Δ , N , n generici. Poiché lo stato fondamentale è invariante per traslazioni, nella decomposizione (2.11) si ha che $\Psi_\alpha = \Psi_\beta$ se $|\alpha\rangle$ si ottiene tramite una permutazione ciclica degli spin di $|\beta\rangle$. L'operatore di traslazione di un sito (2.10) agisce infatti come un operatore di permutazione ciclica tra i siti della catena¹. Per la simmetria di riflessione dell'ordine dei siti, si ha inoltre che $\Psi_\alpha = \Psi_\beta$ se $|\alpha\rangle$ è una riflessione di $|\beta\rangle$.

Il calcolo esatto dei coefficienti Ψ_α per Δ generico è un problema non banale. Le tecniche di *Bethe Ansatz* forniscono uno strumento algoritmico per il calcolo di tali coefficienti a partire dall'insieme delle radici di Bethe, ma il calcolo esplicito è limitato dalla difficoltà, sia analitica che numerica, di trovare una soluzione delle equazioni di Bethe.

Nel caso di $\Delta = -\frac{1}{2}$ però, Razumov e Stroganov hanno mostrato che lo stato fondamentale ha una struttura particolare: una volta decomposto sulla base degli stati in cui ogni spin della catena ha componente definita lungo l'asse di quantizzazione, numerose indicazioni, sia analitiche che numeriche, mostrano che per $\Delta = -\frac{1}{2}$ i coefficienti della decomposizione sono numeri interi, fissata una normalizzazione opportuna. Tali numeri sono inoltre connessi con problemi combinatori, quali l'enumerazione delle matrici a segno alterno.

La storia di queste matrici si è spesso intrecciata con quella dei modelli esattamente risolubili. Nella prossima sezione introduciamo dunque le matrici a segno alterno e l'anello di connessione con la catena XXZ: il modello a sei vertici.

¹Ad esempio $\mathcal{T}|\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$

2.3.4 Matrici a segno alterno e modello a sei vertici

Una matrice a segno alterno (AMS, [8]) è una matrice quadrata con elementi $-1, 0, 1$ tale che in ciascuna riga o colonna gli elementi non nulli si alternino in segno, mentre la somma degli elementi di ciascuna riga o colonna è sempre $+1$. Storicamente tali matrici sono state introdotte negli anni Ottanta nell'ambito dello studio di un algoritmo, introdotto nel diciannovesimo secolo da Dodgson (*alias* Lewis Carroll), utile al calcolo dei determinanti.

Il numero A_n di matrici a segno alterno $n \times n$, al variare di n , fu ben presto congetturato, tramite analisi numeriche (il conteggio esplicito dà la serie $1, 2, 7, 42, 429, 7436, 218348, 10850216, \dots$), in

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} \quad (2.14)$$

e circa un decennio più tardi ne è stata fornita una prova² [10]. Successivamente, Kuperberg [11] ha per primo introdotto le ASM in ambito fisico, evidenziando la connessione col modello a sei vertici e fornendo una dimostrazione alternativa molto più semplice.

Il modello a sei vertici [12, 13] è un modello bidimensionale di meccanica statistica classica su reticolo, esattamente risolubile, in cui si hanno sei possibili configurazioni per ogni vertice. Scegliendo particolari condizioni al contorno dette *a parete di dominio*, si può far corrispondere univocamente una ASM ad ogni configurazione del reticolo.

D'altra parte, esiste uno stretto collegamento tra il modello bidimensionale a sei

²Per un'interessante storia di tale dimostrazione si veda [9]

vertici ed il modello unidimensionale XXZ in quanto, ad esempio, l'hamiltoniana \mathcal{H}_{XXZ} è esprimibile in termini della matrice di trasferimento del modello a sei vertici [7].

2.4 Le congetture di Razumov-Stroganov

2.4.1 Il modello

Il modello di Razumov e Stroganov è la catena quantistica XXZ in assenza di campo esterno, con parametro di anisotropia $\Delta = -\frac{1}{2}$, condizioni periodiche al contorno e numero finito **dispari** di siti, $N = 2n + 1$.

Dunque,

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=1}^N \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y - \frac{1}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right), \quad \vec{\sigma}_{N+1} = \vec{\sigma}_1. \quad (2.15)$$

Nel 1971 Baxter ha dimostrato [14] che l'hamiltoniana (2.15), nel limite termodinamico, ha uno stato fondamentale degenere con $S^z = \pm \frac{1}{2}$ ed energia per sito $E/N = -\frac{3}{2}$.

Nel 2000 Razumov e Stroganov [3] hanno esteso questo risultato al caso di N finito dispari: hanno calcolato numericamente lo stato fondamentale dell'hamiltoniana (2.15) per $N = 3, 5, 7, 9, 11$ ed hanno quindi formulato numerose congetture, alcune tuttora indimostrate. Nel seguito ci riferiremo a questo stato con l'espressione *stato di Razumov-Stroganov* e chiameremo la (2.15) *hamiltoniana di Razumov-Stroganov*.

Lo stato di Razumov-Stroganov ha autovalori noti per l'energia, la magnetizza-

zione ed il momento totale. Tuttavia non è ancora stato dimostrato che si tratti dello stato fondamentale per ogni N dispari.

Prima di enunciare le congetture ci soffermiamo brevemente su alcune proprietà che lo stato fondamentale dell'hamiltoniana (2.15) deve soddisfare.

Innanzitutto, lo stato fondamentale si trova nel settore a impulso nullo, come abbiamo già discusso nel paragrafo 2.3.3. Inoltre, poiché $\Delta = -\frac{1}{2}$, tale stato si trova in fase paramagnetica ed essendo il numero di siti dispari deve essere $S^z = \pm\frac{1}{2}$.

Grazie alla simmetria di riflessione rispetto al piano xy , possiamo specializzarci senza perdita di generalità al caso in cui $S^z = -\frac{1}{2}$. Fissato $N = 2n + 1$, definiamo la base \mathcal{B}_N^- del sottospazio dello spazio di Hilbert formato da stati con n spin su e $n + 1$ spin giù in cui tutti gli operatori σ_j^z ($j = 1, \dots, N$) sono diagonali. La base \mathcal{B}_N^- consta di $\binom{2n+1}{n}$ elementi indipendenti che indicheremo con $|\alpha_i\rangle$, $i = 1, \dots, \binom{2n+1}{n}$. Ad esempio, per $N = 3$ si ha $\mathcal{B}_3^- = \{|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\} \equiv \{|001\rangle, |010\rangle, |100\rangle\}$.

Se espandiamo lo stato fondamentale nella base \mathcal{B}_N^- abbiamo

$$|\Psi\rangle = \sum_{|\alpha\rangle \in \mathcal{B}_N^-} \Psi_\alpha |\alpha\rangle, \quad (2.16)$$

dove $\Psi_\alpha = \Psi_\beta$ se $|\alpha\rangle$ è una permutazione ciclica degli spin di $|\beta\rangle$, a causa dell'invarianza per traslazioni, o se $|\alpha\rangle$ è una riflessione di $|\beta\rangle$. L'invarianza traslazionale ripartisce l'insieme \mathcal{B}_N^- in classi di equivalenza. Scegliamo come rappresentante di ogni classe lo stato che, in notazione binaria, è rappresentato dal numero binario più piccolo³. Definiamo allora $\overline{\mathcal{B}}_N^-$ l'insieme di tali rappresentanti. Questi

³Ad esempio per $N = 7$ abbiamo 5 classi di equivalenza i cui rappresentanti sono $|0000111\rangle$, $|0001011\rangle$, $|0001101\rangle$, $|0010011\rangle$, $|0010101\rangle$

formano una base di $\mathcal{C}_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ vettori con $S^z = -\frac{1}{2}$. I numeri \mathcal{C}_n sono noti in matematica combinatoria come numeri di Catalan e compaiono nella soluzione di numerosi problemi combinatori [15]. Usiamo inoltre una barra sopra i vettori per riferirci alla corrispondente combinazione invariante per traslazioni: ad esempio, $\overline{|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle} = |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$. Abbiamo dunque

$$|\Psi\rangle = \sum_{|\alpha\rangle \in \overline{\mathcal{B}}_N} \Psi_\alpha \overline{|\alpha\rangle}. \quad (2.17)$$

In quanto segue ci riferiremo a ciascuno stato $\overline{|\alpha\rangle}$ che compare nella (2.17) come ad una “componente”, mentre le ampiezze di probabilità Ψ_α saranno genericamente chiamate “coefficienti”.

2.4.2 Le congetture

Enunciamo adesso le congetture sullo stato di Razumov-Stroganov per un certo $N = 2n + 1$. La prima congettura ipotizza che si tratti proprio dello stato fondamentale della (2.15).

Congettura 1 (Razumov-Stroganov). *Se il numero N di siti reticolari è dispari, lo stato fondamentale $|\Psi\rangle$ dell’hamiltoniana (2.15) ha $E = -\frac{3N}{2}$, $S_z = \pm\frac{1}{2}$ e $P = 0$.*

Per l’espressione delle congetture successive, basate su studi numerici, ci riferiamo all’espansione definita dalla (2.17). Per ogni N scegliamo inoltre la normalizzazione in modo che $\Psi_{0\dots 01\dots 1} = 1$. Nel seguito assumeremo sempre tale normalizzazione.

Prima di enunciare la congettura 2 mostriamo i coefficienti dello stato di Razumov-Stroganov fino a $N = 7$:

$$\begin{aligned}
 N = 3 : \quad & \Psi_{001} = 1, \\
 N = 5 : \quad & \Psi_{00011} = 1, \quad \Psi_{00101} = 2, \\
 N = 7 : \quad & \Psi_{0000111} = 1, \quad \Psi_{0001101} = 3, \quad \Psi_{0001011} = 3, \\
 & \Psi_{0010011} = 4, \quad \Psi_{0010101} = 7.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Congettura 2 (Razumov-Stroganov). *Tutti i coefficienti Ψ_α dello stato di Razumov-Stroganov sono interi positivi ed il maggiore è $\Psi_{0010101\dots 01} = A_n$,*

dove A_n indica il numero di matrici $n \times n$ a segno alterno (2.14).

La terza congettura riguarda invece la norma dello stato considerato:

Congettura 3 (Razumov-Stroganov). *La norma dello stato di Razumov-Stroganov è*

$$\mathcal{N}_n = \frac{\sqrt{3^n} 2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2^n 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} A_n = 3^{n/2} \prod_{j=1}^n \frac{(3j-1)!}{(n+j)!}. \tag{2.19}$$

Dai dati numerici emerge anche che la somma dei coefficienti ha una forma particolarmente semplice:

Congettura 4 (Razumov-Stroganov). *La somma dei coefficienti dello stato di Razumov-Stroganov è*

$$3^{n/2} \mathcal{N}_n. \tag{2.20}$$

Nell'articolo [16] con tecniche di *Bethe Ansatz* sono state calcolate **esattamente** le funzioni di correlazione a primi vicini

$$\langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2N^2}, \quad (2.21)$$

$$\langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x \rangle = \langle \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \rangle = \frac{5}{8} + \frac{3}{8N^2}. \quad (2.22)$$

Nel successivo articolo [3] sono state predette le correlazioni tra due spin secondi vicini. Utilizzando la notazione $P_j^\downarrow = \frac{1-\sigma_j^z}{2}$, abbiamo

Congettura 5 (Razumov-Stroganov).

$$\langle P_j^\downarrow P_{j+2}^\downarrow \rangle = \frac{n-1}{4(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)} \left(\frac{71}{4}n^3 + \frac{149}{4}n^2 + 18n + 9 \right) \quad (2.23)$$

Nell'articolo originale [3] e negli articoli successivi [17, 18] sono state formulate anche altre congetture di cui non ci occuperemo in questa tesi.

A tutt'oggi è stata dimostrata soltanto la congettura 2, assumendo vera la congettura 1. Non è ancora stata data, dunque, una spiegazione né matematica né tantomeno fisica del perché a $\Delta = -\frac{1}{2}$ si verifichino queste semplificazioni.

2.4.3 Considerazioni sulle congetture

Prima di passare alle motivazioni che ci hanno spinto allo studio di questo modello, analizziamo brevemente alcune conseguenze delle congetture di Razumov-Stroganov.

L'energia è direttamente proporzionale al numero di siti N (si veda la congettura 1), senza correzioni di ordine finito. Ciò fa presupporre che esistano dei gradi di libertà rispetto ai quali lo stato fondamentale assume una forma particolarmente

semplice: una tale situazione si verifica infatti anche nel caso studiato in [4], cui abbiamo brevemente accennato nella sezione 2.2, nel quale l'andamento dell'energia (2.5) è una conseguenza diretta della fattorizzazione dello stato fondamentale.

L'esistenza di una normalizzazione tale che i coefficienti siano interi è invece una conseguenza immediata del fatto che lo stato di Razumov-Stroganov è un autostato con autovalore semi-intero di una matrice con elementi semi-interi [19]. Tali coefficienti sono inoltre positivi in accordo col teorema di Perron-Frobenius.

Inoltre, gli stati col peso maggiore nella scomposizione (2.17) sono gli stati di tipo Néel $|01010 \dots 10\rangle$, mentre gli stati col peso minore sono quelli formati da due blocchi ferromagnetici $|000 \dots 011 \dots 1\rangle$. In generale stati con blocchi ferromagnetici più grandi hanno un peso minore nella scomposizione (2.17). Questa forma è dovuta al particolare bilanciamento tra l'interazione di scambio positiva lungo l'asse z e negativa lungo gli assi trasversi. Vedremo inoltre nel paragrafo 5.6 che si ha una probabilità molto alta di trovare due spin adiacenti in una certa configurazione antiparallela lungo l'asse z .

La proprietà che ha destato il maggior interesse all'interno della comunità scientifica che si occupa di modelli integrabili è il carattere combinatorio dei coefficienti Ψ_α . Infatti, tutti i coefficienti della scomposizione (2.17), non solo il maggiore, sono in relazione con particolari enumerazioni delle ASM. Questa è un'ulteriore indicazione che esistano dei gradi di libertà non interagenti, in termini dei quali il calcolo dello stato fondamentale si riduca ad un puro calcolo delle possibili configurazioni.

2.5 Studio dello stato di Razumov-Stroganov

Le motivazioni che ci hanno spinto allo studio della catena di Razumov-Stroganov sono le particolari caratteristiche matematiche del possibile stato fondamentale, non corrispondenti, almeno a prima vista, ad altrettanto particolari caratteristiche dell'interazione, e quindi delle proprietà magnetiche del sistema.

In generale infatti, per Δ generico, né l'autovalore dell'energia né i coefficienti Ψ_α dello stato fondamentale sono calcolabili esplicitamente in quanto le equazioni di Bethe sono di difficile risoluzione. Le congetture di Razumov-Stroganov mostrano invece che per $\Delta = -\frac{1}{2}$ i coefficienti del possibile stato fondamentale hanno una forma particolarmente semplice, direttamente connessa con problemi di matematica combinatoria.

Tuttavia, il valore del parametro $\Delta = -\frac{1}{2}$ fisicamente non ha alcuna particolarità nota. Non si tratta di un valore limite in quanto si trova ben all'interno della classe di universalità dei modelli XXZ paramagnetici con $-1 < \Delta < 1$ e non cambia le simmetrie evidenti dell'hamiltoniana (2.7).

Abbiamo pertanto studiato le proprietà di entanglement dello stato di Razumov-Stroganov, forti dei risultati ottenuti ([20]) per le osservazioni di Kurmann [4]. Anche in tal caso infatti, il campo fattorizzante (2.6) si trova all'interno di una ben determinata fase ed è in generale diverso dal campo critico. La fattorizzazione dello stato non è causata da una transizione di fase quantistica, ma bensì da un cambio delle proprietà di entanglement dello stato, senza che questo comporti particolari

anomalie nelle quantità misurabili sperimentalmente.

Un'ulteriore analogia fra i due modelli emerge dall'espressione per l'energia dello stato fondamentale. In entrambi i casi infatti (si veda la congettura 1 e la formula (2.5)) essa è direttamente proporzionale al numero N di siti. Abbiamo così deciso di analizzare gli estimatori di entanglement alla ricerca di una possibile spiegazione "fisica" delle congetture di Razumov-Stroganov.

CAPITOLO 3

Entanglement

Lo studio delle proprietà di entanglement dei sistemi quantistici, pur essendosi principalmente sviluppato nell'ambito della teoria dell'informazione quantistica, ha recentemente trovato collocazione anche in settori più vicini alla fisica dei sistemi reali, dalla fotonica ai sistemi magnetici, dai quantum dots alle trappole ioniche. Dal punto di vista teorico le proprietà di entanglement si sono rivelate strumenti efficaci nello studio della specifica struttura dello stato fondamentale di modelli interagenti su reticolo [21]; in generale infatti l'entanglement è una proprietà dello stato di un sistema quantistico la cui definizione dipende dalla partizione effettuata sul sistema stesso: da questo punto di vista la presenza di un reticolo discreto rende l'interpretazione delle proprietà di entanglement particolarmente diretta e significativa, come vedremo nel seguito.

3.1 Stati puri

Consideriamo un sistema quantistico S formato da due sottosistemi A e B . Sia H_A lo spazio di Hilbert del sistema A e H_B lo spazio di Hilbert del sistema B : lo spazio di Hilbert H_S del sistema composto $S = A \cup B$ è dato dal prodotto tensoriale $H_S = H_A \otimes H_B$.

Siano $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B$ basi ortonormali rispettivamente di H_A, H_B . Ogni vettore $|\psi\rangle_S \in H_S$ può essere scritto nella forma

$$|\psi\rangle_S = \sum_{|\alpha\rangle_A \in \mathcal{B}_A} \sum_{|\beta\rangle_B \in \mathcal{B}_B} C_{\alpha\beta} |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B, \quad (3.1)$$

e rappresenta un possibile stato fisico del sistema composto S . $C_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ è un generico coefficiente che dipende da $|\psi\rangle_S$.

Nel caso particolare in cui si possa scrivere $|\psi\rangle_S$ nella forma

$$|\psi\rangle_S = |\eta\rangle_A \otimes |\xi\rangle_B. \quad (3.2)$$

si dice che $|\psi\rangle_S$ è separabile; quando questo non sia possibile lo stato è detto entangled.

L'entanglement è una proprietà che caratterizza i sistemi quantistici composti che, secondo i principi della meccanica quantistica, hanno spazio di Hilbert di dimensione maggiore rispetto alla somma diretta degli spazi di Hilbert delle parti che lo compongono ($\dim H_A \otimes H_B > \dim H_A + \dim H_B$).

La principale differenza tra stati entangled e non entangled, cioè separabili, risulta evidente già dalle equazioni (3.1) (3.2): nel caso separabile il valore di aspettazione di una qualunque osservabile \mathcal{O}_A relativa al sottosistema A è ${}_A\langle\eta|\mathcal{O}_A|\eta\rangle_A$.

Nel caso entangled viceversa può assumere tutti i valori ${}_A\langle\alpha|\mathcal{O}_A|\alpha\rangle_A$ con probabilità $\sum_{|\beta\rangle}|C_{\alpha\beta}|^2$. Questo significa che, mentre nel caso separabile i sottosistemi A e B sono nello stato puro $|\eta\rangle_A$ e $|\xi\rangle_B$, rispettivamente, nel caso entangled, pur essendo S nello stato puro $|\psi\rangle_S$, i suoi sottosistemi si trovano in quello che in meccanica quantistica è detto stato misto.

In altri termini, la meccanica quantistica, a differenza di quella classica ammette l'esistenza di stati puri di sistemi composti ai quali non corrisponde alcuno stato definito di due o più dei suoi sottosistemi. Stati con questa proprietà sono entangled.

3.2 Stati misti

Sistemi quantistici che si trovano in uno stato misto possono essere descritti nel formalismo della matrice densità¹.

Consideriamo dunque un sistema fisico che si trovi in uno stato misto definito dall'ensemble $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ in cui p_i è la probabilità che il sistema sia nello stato puro $|\psi_i\rangle$ ($\sum_i p_i = 1$). Le proprietà di tale sistema sono descritte in termini dell'operatore densità

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| : \quad (3.3)$$

ρ è un operatore hermitiano, positivo e con traccia uno.

Si noti che la corrispondenza tra operatore densità ed ensemble non è univoca: ci sono infiniti ensemble che corrispondono allo stesso operatore densità. Fissare

¹Per una trattazione più esauriente vedere [22, 23]

uno specifico ensemble equivale a scegliere una particolare decomposizione spettrale della ρ .

Quando lo spazio di Hilbert è uno spazio finito dimensionale, possiamo fissare una base di tale spazio e rappresentare l'operatore densità in forma matriciale definendo la *matrice densità*, che è diagonalizzabile con autovalori reali e non-negativi per definizione.

Nel caso di un sistema composto da due sottosistemi A e B , uno stato misto ρ è detto *separabile* quando può essere scomposto nella forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (3.4)$$

dove ρ_A^i e ρ_B^i sono le matrici densità degli stati dei sottosistemi A e B , ed è $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_i p_i = 1$. Analogamente al caso dello stato puro, uno stato misto di un sistema composto è entangled quando non è separabile.

Sia $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ un sistema nello stato puro $|\psi\rangle$. Lo stato di un generico sottosistema A_i è descritto dalla *matrice densità ridotta*

$$\rho_{A_i} = \text{Tr}_{A \setminus A_i} |\psi\rangle\langle\psi| \quad (3.5)$$

in cui $\text{Tr}_{A \setminus A_i}$ indica la *traccia parziale* su di una base di $A \setminus A_i$. Sia $\mathcal{B}_{A \setminus A_i}$ una tale base, allora

$$\rho_{A_i} = \sum_{|\phi\rangle \in \mathcal{B}_{A \setminus A_i}} \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle \quad (3.6)$$

Analogamente, se il sistema complessivo si trova in uno stato misto ρ si ha

$$\rho_{A_i} = \text{Tr}_{A \setminus A_i} \rho. \quad (3.7)$$

Consideriamo adesso il sistema bipartito $A \cup B$ nello stato puro (3.1). Si ha

$$\begin{aligned}
 \rho_A &= \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| = \\
 &= \sum_{|i\rangle \in \mathcal{B}_B} \sum_{|\alpha\rangle \in \mathcal{B}_A} \sum_{|\alpha'\rangle \in \mathcal{B}_A} \sum_{|\beta\rangle \in \mathcal{B}_B} \sum_{|\beta'\rangle \in \mathcal{B}_B} |\alpha\rangle\langle\alpha'| \langle i|\beta\rangle\langle\beta'|i\rangle C_{\alpha\beta} C_{\alpha'\beta'}^* = \\
 &= \sum_{|\alpha\rangle, |\alpha'\rangle \in \mathcal{B}_A} (CC^\dagger)_{\alpha\alpha'} |\alpha\rangle\langle\alpha'|,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove si è definita la matrice $C = (C_{\alpha\beta})$.

Gli elementi diagonali $\langle\alpha|\rho_A|\alpha\rangle$, $|\alpha\rangle \in \mathcal{B}_A$ rappresentano la probabilità che A si trovi nello stato puro $|\alpha\rangle$ quando il sistema complessivo si trova nello stato puro $|\psi\rangle$.

3.3 Quantificare l'entanglement

La definizione della matrice densità ci permette di quantificare il contenuto di entanglement, di introdurre cioè una *misura* di entanglement.

In effetti, l'entanglement non è un osservabile fisica, ma piuttosto una proprietà dello stato di un sistema quantistico ripartito in più sottosistemi; come tale non è direttamente associato ad una quantità misurabile sperimentalmente² e dipende anche dalla specifica partizione scelta. Con misura di entanglement ci si riferisce dunque ad una funzione che quantifica il contenuto di entanglement di un sistema composto. In tal senso, il termine *misura*, pur essendo il più usato in letteratura, non è particolarmente preciso e sarebbe più opportuno parlare di *estimatore* o *quantificatore*.

²Vedremo comunque nei paragrafi successivi che, in alcuni casi, può essere quantificato tramite le funzioni di correlazione

Inoltre, possono essere introdotte molte forme di entanglement, cui sono state associate negli ultimi anni diverse misure, definite in modo assiomatico o operativo, ciascuna con opportune caratteristiche. Per una rassegna si veda ad esempio [24].

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, gli stati entangled sono responsabili della maggiore dimensionalità dello spazio di Hilbert di un sistema composto rispetto a quella della somma diretta degli spazi di Hilbert dei suoi sottosistemi: un sistema composto quantistico può trovarsi in un numero molto maggiore di stati fisici rispetto al suo analogo classico. Nell'ambito della teoria dell'informazione questa proprietà può essere messa in relazione con la quantità di informazione.

3.3.1 Informazione classica e quantistica

Consideriamo un sistema fisico classico ed una sua osservabile X che possa assumere L valori x_i ($i = 1, \dots, L$) ciascuno con probabilità p_i ($\sum_{i=1}^L p_i = 1$). Supponiamo quindi che una successione di M misure di tale osservabile fornisca come risultato la sequenza $\Sigma_M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_M}\}$ in cui ciascun x_{i_m} è indipendente dai precedenti valori x_{i_l} ($l < m$); si può dimostrare (primo teorema di Shannon) che il contenuto di informazione di una qualsiasi successione Σ_M con M asintoticamente grande è al più pari a $MH(p_1, p_2, \dots, p_L)$, dove

$$H(p_1, \dots, p_L) = - \sum_{i=1}^L p_i \log_2 p_i \quad (3.9)$$

è detta *entropia di Shannon*.

La quantità $MH(p_1, p_2, \dots, p_L)$ può anche essere interpretata come il massimo

numero di supporti fisici necessari ad immagazzinare una qualsivoglia sequenza di lunghezza M prodotta dal sistema fisico in esame, cioè dalla cosiddetta *sorgente*.

Si noti che $H(p_1, p_2, \dots, p_L)$ non dipende dalla sequenza Σ_M considerata, né in termini della sua lunghezza (M) né per quanto riguarda gli specifici valori (x_{i_m}) assunti dall'osservabile X . L'entropia di Shannon è funzione esclusivamente della distribuzione di probabilità p_i e come tale è una proprietà della sorgente in sé. Tale entropia è una quantità limitata ed assume valore massimo $\log_2 N$ nel caso in cui la distribuzione di probabilità sia totalmente casuale ($p_i = 1/L, \forall i$).

Consideriamo adesso un sistema fisico quantistico ed una sua osservabile sulla base dei cui autostati $|\alpha_i\rangle$ l'operatore densità del sistema sia diagonale: $\rho = \sum_i p_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$. In analogia a quanto visto nel caso classico possiamo associare alla distribuzione di probabilità p_i , in termini della quale abbiamo decomposto la ρ , l'entropia di Shannon $H(p_1, p_2, \dots)$. Tale quantità però non è caratteristica soltanto dello stato ρ , ma anche della particolare decomposizione spettrale che ne abbiamo scelto e non è quindi una generalizzazione soddisfacente della (3.9) al caso quantistico. Von Neumann ha dimostrato che tale generalizzazione è in effetti costituita dall'espressione

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (3.10)$$

che definisce l'entropia di Von Neumann e della quale $H(p_1, p_2, \dots)$ rappresenta un forma particolare. Evidentemente quando sia disponibile una decomposizione spettrale della ρ , e quindi una distribuzione di probabilità p_i , l'entropia di Von Neumann può essere interpretata esattamente nello stesso modo proposto per l'en-

tropia di Shannon. Si noti in particolare che se il sistema si trova in uno stato puro $\rho = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|$, allora $S(\rho) = H(p_1 \equiv 1) = 0$. Viceversa, essendo tutti i termini della sommatoria in (3.9) positivi per definizione, se $S(\rho) = 0$ deve esistere uno stato $|\alpha\rangle$ tale che $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, cioè il sistema è in uno stato puro. Essendo S una quantità limitata, possiamo definire anche un'entropia normalizzata $\tilde{S}(\rho)$ tale che $\tilde{S}(\rho) \in [0, 1]$. Sia H lo spazio di Hilbert del sistema, allora

$$\tilde{S}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_{\dim H} \rho). \quad (3.11)$$

3.3.2 Entanglement in stati puri

Consideriamo adesso un sistema quantistico bipartito $A \cup B$ in uno stato puro $|\psi\rangle$. Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, conoscere con certezza lo stato del sistema complessivo non implica la conoscenza dello stato dei sistemi che lo compongono. Nel caso in cui A sia entangled con B abbiamo infatti che A si trova nello stato *misto* $\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$; quindi $S(\rho_A) \neq 0$. Se invece A non è entangled con B , allora ρ_A è puro e $S(\rho_A) = 0$.

Si definisce dunque l'*entropia d'entanglement* associata ad uno stato puro di un sistema bipartito come l'entropia di Von Neumann di uno dei due sottosistemi che lo compongono [25]; formalmente

$$\mathbb{E}(A : B) = S(A) = S(B) \quad (3.12)$$

dove $\mathbb{E}(A : B)$, che dipende dallo stato e dalla partizione scelta, esprime l'entangle-

ment tra i sottosistemi A e B . Dunque,

$$\mathbb{E}(|\psi\rangle) = S(\rho_A) = -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A). \quad (3.13)$$

L'entanglement di un sistema composto è definito soltanto dopo averne fissato una partizione. Ciò nonostante non dipende dagli stati delle parti ma soltanto dalla distribuzione di probabilità, cioè da $|\psi\rangle$.

La diversa notazione usata nelle due equazioni precedenti riflette il fatto che l'entanglement dipende sia dalla partizione scelta (equazione (3.12)) che dallo stato del sistema complessivo (equazione (3.13)). Nel seguito useremo l'una o l'altra delle due notazioni a seconda della specifica dipendenza che vorremo evidenziare.

Si può verificare che $S(A) = S(B)$; quest'uguaglianza è fisicamente richiesta poiché una misura di entanglement deve essere indipendente dal fatto che si facciano operazioni su A o su B .

Si noti che, essendo l'entropia di Von Neumann definita tramite una traccia, l'entanglement non cambia a seguito di una trasformazione unitaria locale che agisce su un singolo sottosistema. Fisicamente questo significa che non è possibile variare il contenuto di entanglement del sistema complessivo intervenendo soltanto su uno dei due sottosistemi, cioè attraverso operazioni locali.

3.3.3 Entanglement in stati misti

Consideriamo adesso un sistema bipartito $A \cup B$ in uno stato misto ρ e sia $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ l'ensemble che definisce una particolare decomposizione spettrale di ρ . È ragionevole

associare a ρ l'entanglement medio

$$\overline{\mathbb{E}(\rho)} = \sum_i p_i \mathbb{E}(|\psi_i\rangle), \quad (3.14)$$

dove $\mathbb{E}(|\psi_i\rangle)$ è dato dalla (3.13): l'entanglement medio però non è univocamente definito poiché dipende dalla decomposizione scelta.

Si può comunque dimostrare che la quantità

$$\mathbb{E}(\rho) = \inf_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i \mathbb{E}(|\psi_i\rangle), \quad (3.15)$$

è una buona misura di entanglement. Nella (3.15) l'estremo inferiore è inteso rispetto a tutte le possibili decomposizioni spettrali di ρ , il che rende la definizione indipendente dalla decomposizione stessa.

In sintesi, si calcola la media pesata dell'entropia di entanglement degli stati puri che generano lo stato misto ρ per tutte le possibili decomposizioni in stati puri di ρ ; si prende poi l'estremo inferiore in modo che non dipenda dalla decomposizione scelta.

La misura di entanglement definita dalla (3.15) è relativa al cosiddetto entanglement di formazione [25, 26]. Nel caso di uno stato misto sono state proposte anche altre misure che si riconducono all'entropia di Von Neumann nel caso di uno stato puro, quali l'entanglement distillabile [25] e l'entropia relativa di entanglement [27, 28]

3.3.4 Sistemi di *qubits*

In generale, anche quando si abbiamo a disposizione le definizioni di opportune misure, l'entanglement è una quantità difficile da calcolare per sistemi generici.

Esistono però alcune importanti semplificazioni nel caso in cui si considerino sistemi quantistici costituiti da sottosistemi con spazio di Hilbert di dimensione 2, che in teoria dell'informazione quantistica sono detti *qubits* (quantum bits) e rappresentano l'unità base dell'informazione. I qubits sono realizzati in fisica da sistemi quantistici a due livelli quali il fotone con le sue due polarizzazioni, una particella di spin $\frac{1}{2}$ con le sue due componenti lungo l'asse di quantizzazione e molti altri ancora. I due stati indipendenti sono convenzionalmente rappresentati come $|0\rangle, |1\rangle$ in quanto il qubit è l'analogo quanto-meccanico del bit classico.

One-tangle

Consideriamo un sistema composto $A \cup B$ che si trovi nello stato puro $|\psi\rangle$ e sia A un qubit. Si può dimostrare [29] che

$$\mathbb{E}(|\psi\rangle) = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \tau_A(|\psi\rangle)}\right), \quad (3.16)$$

in cui $h(x) = -(1-x)\log_2(1-x) - x\log_2 x$ è la cosiddetta entropia di Shannon binaria; τ_A è detto *one-tangle* ed è definito come

$$\tau_A(|\psi\rangle) = 4 \det \rho_A = 4 \det \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (3.17)$$

Si noti che la comparsa dell'entropia binaria è diretta conseguenza del fatto che A è un qubit. È da sottolineare inoltre che la (3.16) vale solo per stati puri e non ha a tutt'oggi generalizzazione soddisfacente per stati misti. La difficoltà di tale generalizzazione deriva dalla minimizzazione rispetto a tutte le decomposizioni spettrali della ρ che compare nella (3.15): nel caso in cui B sia un sistema con spazio

di Hilbert di dimensione qualsiasi tale minimizzazione non è infatti esplicitamente gestibile.

Concurrence

Consideriamo un sistema composto $A \cup B$ nello stato ρ e siano A e B entrambi qubits. Si può dimostrare [30] che

$$\mathbb{E}(\rho) = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - C_{AB}^2(\rho)}\right), \quad (3.18)$$

in cui

$$C_{AB}(\rho) = \max\{0, 2\lambda - \text{Tr}(R)\}, \quad R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}, \quad (3.19)$$

dove λ è l'autovalore massimo della matrice R e $\tilde{\rho} = (\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) \rho^* (\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B)$; ρ^* rappresenta il complesso coniugato di ρ nella base standard della coppia $A \cup B$, $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ mentre $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Si noti che la massimizzazione che compare nell'equazione (3.19) deriva dalla necessaria minimizzazione della definizione (3.15).

La relazione (3.18), a differenza della (3.16), vale anche per stati misti. Questo permette di considerare anche il caso in cui il sistema sia costituito dai due qubits A e B , ma anche da un terzo sottosistema generico C . In tal caso infatti se $A \cup B \cup C$ si trova nello stato misto ρ^{TOT} , la definizione (3.18) continua a valere con $\rho = \text{Tr}_C \rho^{\text{TOT}}$.

A volte la quantità C_{AB}^2 è detta *two-tangle* per analogia fra la (3.16) e la (3.18).

Si noti infine che, essendo $h(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x})$ una funzione monotona di x , sia lo one-tangle che la concurrence sono essi stessi misura di entanglement. Si può

facilmente verificare inoltre che τ_A e C_{AB} variano tra 0 e 1: quando si annullano A e B sono separabili mentre quando assumono il valore massimo si dice che A e B sono massimamente entangled.

3.4 Entanglement multipartito

La definizione di una misura di entanglement genuinamente multipartito, che non sia cioè riconducibile a forme di entanglement bipartito, si è rivelata essere un problema molto difficile di cui, ad oggi, non è ancora stata trovata una soluzione.

Alcune indicazioni circa l'entanglement multipartito sono comunque disponibili. Una delle più rilevanti deriva da quella che è forse la proprietà più peculiare dell'entanglement che va sotto il nome di *monogamia di entanglement*. Nel caso di un sistema tripartito tale proprietà può essere enunciata nel modo seguente: *se due sistemi A, B sono massimamente entangled allora non possono essere entangled con un terzo sistema C* . Formalmente, dato un sistema multipartito $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup B$ deve valere

$$\mathbb{E}(A_1 : B) + \mathbb{E}(A_2 : B) + \dots + \mathbb{E}(A_n : B) \leq \mathbb{E}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n : B) \quad (3.20)$$

che fisicamente rappresenta una relazione di estensività.

Nel caso in cui i singoli sottosistemi sono costituiti da qubits, ci sono indicazioni [29] che il two-tangle e lo one-tangle siano estensivi. Inoltre, nel caso di un sistema tripartito formato da tre qubits è stata introdotta una misura denominata *tangle*

[29], che sembra generalizzabile anche al caso di un sistema multipartito di N qubits, attraverso le proprietà degli iperdeterminanti [31].

Dalla monogamia dell'entanglement seguono comunque alcune importanti relazioni. In particolare è stato dimostrato che per un sistema di n qubits $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ in uno stato puro

$$\sum_{j \neq i} C_{A_i A_j}^2 \leq \tau_{A_i}, \quad \forall i. \quad (3.21)$$

A differenza dell'equazione (3.20), che è puramente formale, questa disuguaglianza contiene quantità calcolabili tramite le relazioni (3.17) e (3.19): grazie ad essa si possono definire degli estimatori che consentono di quantificare il contenuto di entanglement multipartito presente in un dato stato quantistico, l'*entanglement residuo* R e l'*entanglement ratio* r , rispettivamente

$$R = \tau_{A_i} - \sum_{j \neq i} C_{A_j B}^2 \quad (3.22)$$

$$r = \frac{\sum_{j \neq i} C_{A_j B}^2}{\tau_{A_i}} \quad (3.23)$$

Si noti che sia la concurrence che lo one-tangle sono misure di entanglement bipartito. Grazie alla disuguaglianza (3.21), però, le quantità R e r ci consentono di ottenere informazioni, seppur indirette e qualitative, anche sull'entanglement multipartito. Si supponga per esempio che sia $\tau_{A_i} = 1$; questo può significare che A_i è massimamente entangled con un certo A_j , oppure che è variamente entangled con più qubits.

3.4.1 Esempio: sistema di tre qubits

Nello studio della relazione tra entanglement bipartito ed entanglement multipartito assumono particolare rilevanza due specifici stati di un sistemi costituito da tre soli qubits, i cosiddetti stati W_3 e GHZ [32], definiti come

$$|W_3\rangle = \frac{|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{3}} \quad (3.24)$$

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.25)$$

Analizziamo dunque le proprietà di entanglement di questi due stati.

Stato W_3

Un semplice calcolo mostra che

$$C_{A_i A_j}^{W_3} = \frac{2}{3}, \quad \tau_{A_i}^{W_3} = \frac{8}{9}, \quad R_{A_i}^{W_3} = 0, \quad (3.26)$$

con $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Poiché l'entanglement residuo è nullo, lo stato W_3 non ha entanglement multipartito. Inoltre, eseguendo una traccia parziale su uno dei qubits ottengo sempre uno stato massimamente entangled, essendo la concurrence pari ad uno. Lo stato W_3 è dunque stabile rispetto alla perdita di informazione su uno dei tre qubits: anche se una della parti che condivide lo stato decide di non cooperare più con le altre due non può comunque distruggere l'entanglement tra di loro.

Stato GHZ

Per lo stato GHZ abbiamo invece

$$C_{A_i:A_j}^{\text{GHZ}} = 0, \quad \tau_{A_i}^{\text{GHZ}} = 1, \quad (3.27)$$

con $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$: pur essendo ogni coppia non entangled ciascun qubit è massimamente entangled col resto del sistema [33]. A differenza di quanto osservato nel W_3 eseguendo una traccia parziale su uno dei qubits, si ottiene sempre uno stato non entangled. Pertanto, se una delle parti che sta condividendo lo stato composto decide di non cooperare con le altre due, allora queste non possono più beneficiare di uno stato entangled condiviso. Lo stesso accade se, per qualche motivo, perdiamo informazione su uno dei tre qubits.

Lo stato W_3 può essere generalizzato al caso di N qubit nella forma

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|1000\dots\rangle + |0100\dots\rangle + |0010\dots\rangle + \dots), \quad (3.28)$$

che, si dimostra, avere entanglement residuo nullo per ogni N . Eseguendo una traccia parziale su $N - 2$ qubits otteniamo sempre uno stato entangled. Pertanto, due qualsiasi parti rimangono comunque entangled indipendentemente dal fatto che le altre $N - 2$ decidano di cooperare o meno.

Non esiste invece una generalizzazione al caso $N > 3$ dello stato GHZ.

3.5 Entanglement in catene di spin

L'analisi delle proprietà di entanglement ha un'applicazione particolarmente rilevante nello studio di spin $\frac{1}{2}$ distribuiti su reticolo. In tal caso ogni qubit A_i è realizzato

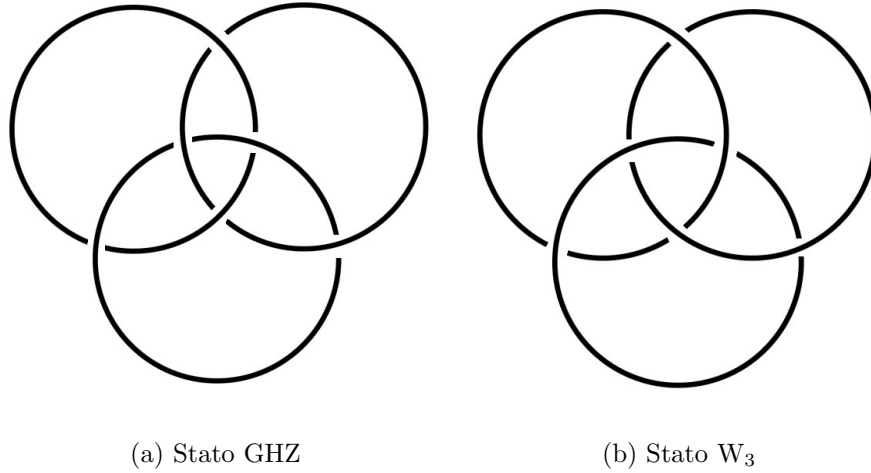


Figura 3.1: Rappresentazione topologica dell'entanglement tra tre qubits [34]. Ad ogni qubit assegniamo un anello in modo che due anelli sono intrecciati se i rispettivi qubits sono entangled. Gli anelli di figura 3.1a sono noti in letteratura come *anelli di Borromeo*, mentre figura 3.1b mostra gli *anelli di Hopf*. Rappresentiamo il disaccoppiamento di un qubits col taglio del rispettivo anello. Se tagliamo uno dei tre anelli dello stato W_3 , gli altri due rimangono comunque intrecciati. Viceversa, tagliando un anello nello stato GHZ gli altri due diventano separati. Questa è la famosa caratteristica degli anelli di Borromeo.

dallo spin $\frac{1}{2}$ localizzato sul sito i -esimo del reticolo, ed il sistema complessivo realizza il cosiddetto *registro quantistico*.

Quando gli spin interagiscono, ad esempio tramite un'hamiltoniana del tipo (2.4), esiste evidentemente una relazione fra le proprietà di entanglement, espressione diretta della struttura dello stato in cui si trova il sistema complessivo per effetto dell'interazione fra i sottosistemi che lo compongono, ed i valori assunti dalle variabili fisiche del sistema stesso. A tale proposito, si noti che nei paragrafi precedenti non abbiamo mai dovuto specificare se i sottosistemi in esame fossero in interazio-

ne: nell'ambito della teoria dell'informazione quantistica infatti ha rilevanza il solo stato del sistema e non il meccanismo fisico che ne è responsabile, genericamente indicato con i termini “preparazione” o “manipolazione”. Tale meccanismo diventa però fondamentale quando si vogliono realizzare fisicamente protocolli ed algoritmi di computazione quantistica.

Consideriamo dunque N spin localizzati sui siti reticolari di una catena S che si trovi in uno stato puro $|\psi\rangle$. Dati gli strumenti definiti nelle pagine precedenti, possiamo considerare diverse partizioni della catena e le relative proprietà di entanglement. Supponiamo per esempio di suddividere S in due sottosistemi A e B che contengano M e $N - M$ spin: possiamo in tal caso calcolare l'entropia di entanglement $S(\text{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi|) = S(\text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|)$ che rappresenta quanto i due sottosistemi sono entangled tra loro. Si noti che a questo livello A e B possono essere sistemi qualsiasi purché la loro unione esaurisca il sistema complessivo. Questa quantità ci permette, per esempio, di studiare l'entanglement fra un blocco di M spin adiacenti con il resto della catena, ma anche quello fra tutti gli spin sui i siti pari e quelli sui siti dispari, e così via. In particolare possiamo anche considerare A un singolo spin e B il resto della catena, nel qual caso è disponibile l'espressione dello one-tangle. Per quanto riguarda l'entanglement tra due spin nella catena, particolarmente rilevante per l'analogia concettuale con le funzioni di correlazione possiamo utilizzare lo strumento della concurrence.

3.5.1 Quantificare l'entanglement in catene di spin

Nonostante l'entanglement non sia, come abbiamo più volte sottolineato un osservabile fisica, sia lo one-tangle che la concurrence possono essere scritti in termini di valori di aspettazione di osservabili fisiche e, in alcuni casi particolari, delle sole quantità magnetiche usuali, ossia le magnetizzazioni

$$M_i^\alpha = \langle S_i^\alpha \rangle \quad (3.29)$$

e le funzioni di correlazione

$$G_{ij}^{\alpha\beta} = \langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle, \quad (3.30)$$

in cui $\alpha, \beta = x, y, z, +, -$ e $S^\pm = S^x \pm iS^y \equiv \sigma^\pm = \frac{\sigma^x \pm i\sigma^y}{2}$.

One-tangle

Consideriamo la matrice densità ridotta di uno spin sul sito i e la sua decomposizione in termini di matrici di Pauli $\rho_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 q_i^\alpha \sigma_i^\alpha$ con $\sigma_i^0 \equiv \mathbb{I}$: essendo $q_i^\alpha = \text{Tr}(\sigma_i^\alpha \rho_i) \equiv \langle \sigma_i^\alpha \rangle$ si ha

$$\rho_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + M_i^z & M^x + iM^y \\ M^x - iM^y & \frac{1}{2} - M_i^z \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

e lo one-tangle è quindi

$$\tau_i = \frac{1}{4} - \sum_{\alpha=1}^3 (M_i^\alpha)^2. \quad (3.32)$$

Concurrence

Consideriamo adesso la matrice densità ridotta di due spin sui siti i e j e la sua decomposizione in termini del prodotto tensoriale di due matrici di Pauli $\rho_{ij} =$

$\sum_{\alpha,\beta=0}^3 q_{ij}^{\alpha\beta} \sigma_i^\alpha \otimes \sigma_j^\beta$: essendo $q_{ij}^{\alpha\beta} = \text{Tr}(\sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \rho_{ij}) \equiv \langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \rangle$ si ha

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \langle P_i^\uparrow P_j^\uparrow \rangle & \langle P_i^\uparrow \sigma_j^- \rangle & \langle \sigma_i^- P_j^\uparrow \rangle & \langle \sigma_i^- \sigma_j^- \rangle \\ \langle P_i^\uparrow \sigma_j^+ \rangle & \langle P_i^\uparrow P_j^\downarrow \rangle & \langle \sigma_i^- \sigma_j^+ \rangle & \langle \sigma_i^- P_j^\downarrow \rangle \\ \langle \sigma_i^+ P_j^\uparrow \rangle & \langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle & \langle P_i^\downarrow P_j^\uparrow \rangle & \langle P_i^\downarrow \sigma_j^- \rangle \\ \langle \sigma_i^+ \sigma_j^+ \rangle & \langle \sigma_i^+ P_j^\downarrow \rangle & \langle P_i^\downarrow \sigma_j^+ \rangle & \langle P_i^\downarrow P_j^\downarrow \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

dove $P^\uparrow = \frac{1}{2}(1 + \sigma^z)$, $P^\downarrow = \frac{1}{2}(1 - \sigma^z)$ e $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$.

La (3.33) si semplifica notevolmente quanto \mathcal{H} gode di alcune proprietà; in particolare nel caso dell'hamiltoniana (2.4) con campo diretto lungo z si può verificare che

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & f_{ij} \\ 0 & b_{ij} & c_{ij} & 0 \\ 0 & c_{ij}^* & e_{ij} & 0 \\ f_{ij}^* & 0 & 0 & d_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

dove i simboli $a_{ij} \dots f_{ij}$, scritti tramite le funzioni di correlazione, possono essere letti dalla (3.33).

Con una matrice della forma (3.34) la concurrence è data da

$$C_{ij} = 2 \max \{0, C'_{ij}, C''_{ij}\}, \quad (3.35)$$

dove $C'_{ij} = |c_{ij}| - \sqrt{a_{ij}d_{ij}}$ e $C''_{ij} = |f_{ij}| - \sqrt{b_{ij}e_{ij}}$ che, in termini delle funzioni di correlazione, hanno questa forma

$$C'_{ij} = |G_{ij}^{xx} + G_{ij}^{yy}| - \sqrt{\left(\frac{1}{4} + G_{ij}^{zz}\right)^2 - \frac{1}{4}(M_i^z + M_j^z)^2}, \quad (3.36)$$

$$C''_{ij} = |G_{ij}^{xx} - G_{ij}^{yy}| + G_{ij}^{zz} - \frac{1}{4}. \quad (3.37)$$

Concurrence in termini delle configurazioni degli spin

Le espressioni (3.36) sono strumenti molto potenti per il calcolo quantitativo dell'entanglement bipartito di un sistema, ma non permettono di visualizzare in maniera esplicita la struttura dello stato in cui si trova la coppia di spin i, j e di mettere in relazione l'entanglement con tale struttura.

Per sviluppare tale relazione [35] consideriamo la catena nello stato puro $|\psi\rangle$: possiamo esprimere $|\psi\rangle$ in modo da isolare la coppia di spin i e j , ossia $|\psi\rangle = \sum_{\nu=1}^4 |\phi_\nu\rangle \sum_{\Gamma} C_{\nu\Gamma} |\Gamma\rangle$ in cui $\{|\phi_\nu\rangle\}$ è una generica base per gli stati della coppia i, j e la seconda sommatoria è su tutti i possibili stati del resto della catena.

Individuiamo basi dello spazio di Hilbert di un sistema a due spin definite da stati che abbiano entanglement minimo o massimo. Una tale base è la base standard $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ costituita da stati separabili e quindi ad entanglement nullo. All'estremo opposto troviamo la base di Bell

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle), \quad (3.38a)$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle), \quad (3.38b)$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (3.38c)$$

$$|e_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (3.38d)$$

costituita dai cosiddetti stati di Bell, che rivestono una particolare importanza in teoria dell'informazione quantistica, essendo massimamente entangled.

Come mostrato nell'equazione (3.8), dato un sistema nello stato ρ , gli elementi diagonali $|\phi_\nu\rangle\langle\phi_\nu|$ della matrice densità ridotta ρ_{ij} rappresentano la probabilità che

lo spin i -esimo e lo spin j -esimo si trovino in uno stato rappresentato da $|\phi_\nu\rangle$ quando il sistema complessivo si trova nello stato rappresentato da ρ .

Indichiamo dunque con $p_I, p_{II}, p_{III}, p_{IV}$ le probabilità che due spin della catena si trovino negli stati separabili $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$, rispettivamente. Con le notazioni introdotte, se ci riferiamo alla coppia di spin in posizione i -esima e j -esima, abbiamo che $p_I \equiv a_{ij}$, $p_{II} \equiv d_{ij}$, $p_{III} \equiv b_{ij}$ e $p_{IV} \equiv e_{ij}$. Siano inoltre p_1, p_2, p_3, p_4 le probabilità che due spin si trovino negli stati di Bell massimamente entangled $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, |e_4\rangle$ dati da (3.38). Nel caso dell'hamiltoniana (2.4) con campo diretto lungo z si trova

$$p_I = \frac{1}{4} + G^{zz} + M^z, \quad (3.39a)$$

$$p_{II} = \frac{1}{4} + G^{zz} - M^z, \quad (3.39b)$$

$$p_{III} = \frac{1}{4} - G^{zz} \equiv p_{IV}, \quad (3.39c)$$

$$p_1 = \frac{1}{4} + G^{xx} - G^{yy} + G^{zz}, \quad (3.39d)$$

$$p_2 = \frac{1}{4} - G^{xx} + G^{yy} + G^{zz}, \quad (3.39e)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} + G^{xx} + G^{yy} - G^{zz}, \quad (3.39f)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} - G^{xx} - G^{yy} - G^{zz}. \quad (3.39g)$$

Ne consegue che

$$C = 2 \max \{0, C', C''\} \quad (3.40)$$

$$C' = \frac{1}{2} |p_3 - p_4| - \sqrt{p_I p_{II}} = \max \{p_3, p_4\} + \frac{1}{2} \left((\sqrt{p_I} - \sqrt{p_{II}})^2 - 1 \right), \quad (3.41)$$

$$C'' = \frac{1}{2} |p_1 - p_2| - \sqrt{p_{III} p_{IV}} = \max \{p_1, p_2\} - \frac{1}{2}. \quad (3.42)$$

Da queste espressioni si vede immediatamente che condizione necessaria affinché C'' sia positivo è $p_1 > \frac{1}{2}$ o $p_2 > \frac{1}{2}$; cioè che ad uno dei due stati di Bell *paralleli* ($|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$) competa la massima probabilità. C' è invece favorito sia da una maggiore probabilità di avere stati di Bell *antiparalleli* ($|e_3\rangle$, $|e_4\rangle$), sia da una maggiore magnetizzazione. Si può dimostrare infatti, [35] che $(\sqrt{p_I} - \sqrt{p_{II}})^2$ è tanto più grande quanto maggiore è la magnetizzazione del sistema. Quindi, ci sono sostanzialmente due tipi di entanglement, quello parallelo e quello antiparallelo. Se C'' è più grande, si sviluppa l'entanglement poiché gli spin tendono a disporsi in uno stato di Bell parallelo. Se invece C' è il termine più grande si ha entanglement poiché gli spin tendono a disporsi in modo antiparallelo. La concurrence ha origine quindi dalla diversa probabilità che due spin siano paralleli o antiparalleli. Nel caso in cui $C = C'$ l'entanglement è detto parallelo; per $C = C''$ è invece detto antiparallelo.

CAPITOLO 4

Studio dell'hamiltoniana di Razumov-Stroganov

Le congetture di Razumov-Stroganov [3] mostrano un'importante connessione tra lo stato fondamentale della catena periodica di spin XXZ con parametro d'anisotropia $\Delta = -\frac{1}{2}$ ed il numero di matrici a segno alterno [8]. Successivamente, tali congetture sono state ampliate e generalizzate anche per condizioni al contorno differenti [17], [18].

Alcuni progressi verso la comprensione di queste congetture sono stati fatti collegando il modello unidimensionale (2.15) con modelli integrabili bidimensionali quali ad esempio il modello a sei vertici ed il *fully packed loop model*, i cui stati sono in corrispondenza biunivoca con le matrici a segno alterno.

È stato inoltre notato [17] che la corrispondenza tra il modello fisico XXZ e le matrici a segno alterno è più generale quando l'hamiltoniana (2.15) è espressa in termini dei generatori dell'algebra di Temperley-Lieb. Esiste un'elegante rappresentazione

grafica di quest'algebra nella quale l'hamiltoniana agisce sulle configurazioni di archi che connettono coppie di punti su una circonferenza e può essere reinterpretata in termini della matrice di trasferimento del *dense periodic O(1) loop model*.

Un'altra connessione interessante si ha con i modelli supersimmetrici. Veneziano e Wosiek [36] ad esempio, studiando un modello planare di matrici supersimmetrico, hanno osservato che il corrispondente stato bosonico di vuoto ha la stessa struttura dello stato di Razumov-Stroganov.

La catena XXZ con $\Delta = -\frac{1}{2}$ non ha fisicamente alcuna simmetria addizionale rispetto agli altri modelli nella stessa classe di universalità, con $|\Delta| < 1$. La particolare forma dello stato fondamentale, matematicamente così strutturata, può indurre a pensare che a $\Delta = -\frac{1}{2}$ ci sia una simmetria addizionale.

La natura combinatoria dello stato fondamentale e la dipendenza lineare dell'energia dalla lunghezza della catena fanno inoltre presupporre che per $\Delta = -\frac{1}{2}$ si possa riesprimere l'hamiltoniana in termini di nuovi gradi di libertà non interagenti. In questo capitolo discutiamo due modelli che hanno una particolare connessione con l'hamiltoniana XXZ al preciso valore $\Delta = -\frac{1}{2}$. Nella prossima sezione esprimiamo una generica hamiltoniana XXZ in termini dei generatori dell'algebra di Temperley-Lieb e studiamo una rappresentazione grafica di tale algebra; motivati dal fatto che, soltanto al valore $\Delta = -\frac{1}{2}$, tali generatori diventano proiettori unidimensionali. Nella sezione successiva introduciamo un modello supersimmetrico di fermioni su reticolo e discutiamo una corrispondenza tra settori con un numero fissato di fermioni, in tale modello, e settori a S^z fissato nella catena di spin XXZ con parametro

d'anisotropia $\Delta = -\frac{1}{2}$.

4.1 Algebra di Temperley-Lieb

L'algebra di Temperley-Lieb [37] è un'algebra associativa i cui generatori e_i ($i = 1, \dots, N$), dipendenti da un parametro q , obbediscono alle relazioni

$$\begin{aligned} e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i, \\ e_i e_j &= e_j e_i, & |i - j| > 1, \\ e_i^2 &= (q^2 + q^{-2}) e_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Questi generatori hanno una rappresentazione nella base di due spin $\{\uparrow_i \uparrow_{i+1}, \uparrow_i \downarrow_{i+1}, \downarrow_i \uparrow_{i+1}, \downarrow_i \downarrow_{i+1}\}$:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Dunque, in termini delle matrici di Pauli, si ha

$$e_i = \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+ + \frac{q^2 + q^{-2}}{4} - \frac{q^2 + q^{-2}}{4} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \frac{q^2 - q^{-2}}{4} (\sigma_i^z - \sigma_{i+1}^z). \quad (4.3)$$

Usando questi generatori si riscrive l'hamiltoniana XXZ (2.7) di una catena di N spin con condizioni periodiche al contorno:

$$\mathcal{H}_{\text{XXZ}} = -2 \sum_{i=1}^N e_i + \frac{q^2 + q^{-2}}{2} N \quad (4.4)$$

$$= - \sum_{i=1}^N \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y - \frac{q^2 + q^{-2}}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right) \quad (4.5)$$

Il parametro q fissa dunque Δ in maniera univoca, $\Delta \equiv -\frac{q^2+q^{-2}}{2}$. Al contempo, qualsiasi hamiltoniana XXZ può essere espressa tramite i generatori dell'algebra di Temperley-Lieb; per $\Delta \geq 1$ il parametro q è reale, per $\Delta \leq -1$ è immaginario puro, mentre per $|\Delta| < 1$ è un numero complesso di modulo uno. Notiamo quindi che per $|\Delta| < 1$ le matrici e_i non sono hermitiane in questa rappresentazione; recuperiamo l'hermiticità soltanto per condizioni al contorno periodiche, dopo aver sommato tutti gli N generatori.

È interessante sottolineare che a $\Delta = -\frac{1}{2}$, e unicamente a questo valore, i generatori e_i si riducono a proiettori unidimensionali. Si ha infatti che q è la radice dell'unità $q = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $q^2 + q^{-2} = 1$ ed i generatori dell'algebra di Temperley-Lieb sono pertanto dei proiettori sullo stato

$$q|10\rangle + q^{-1}|01\rangle, \quad (4.6)$$

che chiameremo stato di q -singoletto.

Fissiamo dunque $q \equiv e^{\frac{i\pi}{6}}$ e consideriamo lo stato di Razumov-Stroganov $|\Psi\rangle$ per un certo N . Posto $\mathcal{H}_{TL} = \sum_{i=1}^N e_i$, l'hamiltoniana di Razumov-Stroganov è $\mathcal{H} = -2\mathcal{H}_{TL} + N/2$ e pertanto lo stato di Razumov-Stroganov è l'autostato di \mathcal{H}_{TL} con autovalore massimo N :

$$\mathcal{H}_{TL}|\Psi\rangle = N|\Psi\rangle. \quad (4.7)$$

Notiamo comunque che, in generale, lo stato di Razumov-Stroganov non è autostato di e_i .

posti da linee che ricoprono un reticolo bidimensionale $N \times \infty$; ogni vertice si trova con la stessa probabilità in uno dei due stati $\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array}$, $\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$, per cui tutti i grafici del modello $O(1)$ sono equiprobabili, ma non lo sono le corrispondenti configurazioni di archi.

Si verifica che \mathcal{H}_{TL} nella rappresentazione (4.8) è esprimibile in termini della matrice di trasferimento del modello su reticolo.

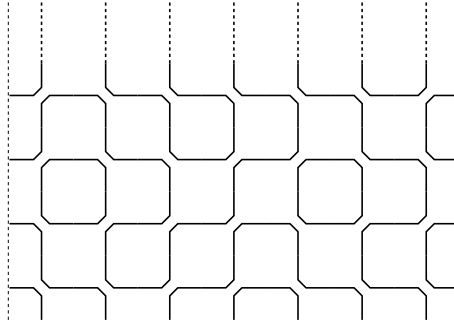
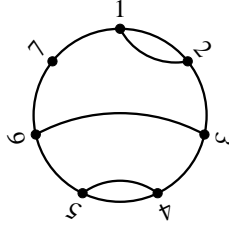


Figura 4.1: Parte di una generica configurazione del modello $O(1)$ su un reticolo semi-infinito con $N = 7$ e condizioni al contorno periodiche.

Un taglio orizzontale tra i vertici interseca le linee in N punti. Definiamo la configurazione ad archi dal modo in cui tali punti sono connessi dalla figura del semi-reticolo sopra il taglio. La distribuzione di probabilità delle varie possibili connessioni in prossimità del taglio determina completamente i coefficienti dell'autovettore di \mathcal{H}_{TL} con autovalore massimo.

Un'interessante rappresentazione degli stati del modello $O(1)$ per condizioni periodiche (la topologia del reticolo in questo caso è quella di un cilindro semi-infinito) si ha ponendo su una circonferenza gli N punti individuati dal taglio. Su tale circonferenza, ordiniamo per convenzione gli N punti in senso orario partendo dall'alto.

Inoltre, se alla base del cilindro i due punti in posizione i e j sono collegati, allora si collegano anche i rispettivi punti sulla circonferenza. Ad esempio per lo stato di figura 4.1 si ha:



Nel seguito ci riferiremo ai punti della circonferenza col termine “vertice”. Per N pari, tutti i vertici sono connessi a due a due; per N dispari, invece, rimane un vertice disaccoppiato (che corrisponde nel cilindro ad una linea che dal bordo inferiore si dipana per il reticolo fino all’infinito).

Le configurazioni di connessioni dei “vertici” sulle circonferenze, d’ora in poi denominate semplicemente diagrammi, formano una base di stati non ortogonali, ma indipendenti. L’hamiltoniana $\mathcal{H}_{TL} = \sum_i e_i$ in questa base non è quindi simmetrica; tuttavia è unica per l’indipendenza lineare degli stati e gli autovalori, relativi agli autovettori destri², sono gli stessi.

Esaminiamo adesso l’azione di \mathcal{H}_{TL} sullo spazio dei diagrammi: per ogni i fissato consideriamo l’azione di e_i su un generico diagramma; supponiamo che tale diagramma abbia il vertice i -esimo collegato col j -esimo ed il vertice $(i + 1)$ -esimo collegato

²Precisiamo, infatti, che dobbiamo parlare di autovettore destro, essendo l’hamiltoniana non simmetrica. Si verifica inoltre che la somma degli elementi appartenenti ad una colonna fissata di \mathcal{H}_{TL} è sempre pari ad N . Ciò implica che il raggio spettrale, e dunque l’autovalore massimo, di \mathcal{H}_{TL} sia N . Tuttavia questo implica anche che \mathcal{H}_{TL} ha sempre un autovettore sinistro banale (i cui elementi sono tutti pari a 1) con autovalore N .

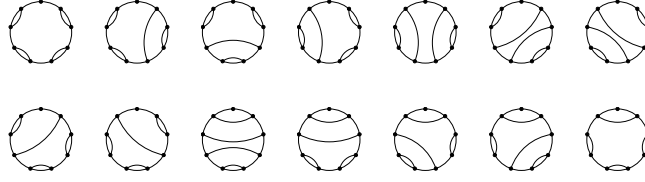


Figura 4.2: I 14 grafici indipendenti di $\overline{\mathcal{B}}_9^\ell$

col k -esimo. Sono dunque possibili due casi; quando $j = i + 1$ e $k = i$ l'operatore e_i non cambia la configurazione dei collegamenti. Viceversa, quando $j \neq i + 1$ e $k \neq i$, l'azione di e_i sostituisce i due collegamenti, connettendo i a $i + 1$ e j a k . Quando invece uno dei due siti i e $i + 1$ non ha connessioni e l'altro è collegato con j , l'azione di e_i connette i a $i + 1$ lasciando scollegato j .

I grafici del modello $O(1)$ si possono visualizzare anche in termini di “parole” di parentesi e barre: ad ogni collegamento tra due punti si fa corrispondere una coppia di parentesi, mentre in presenza di un punto disaccoppiato si inserisce una barra. Per N pari, se j è collegato con $k > j$ allora si pone una parentesi “(” in posizione j e una parentesi “)” in posizione k . Per N dispari scegliamo invece la regola che il carattere “|”, relativo al sito disaccoppiato, non si trovi mai dentro alle due parentesi. Ad esempio per il grafico di figura 4.1 si ha $()(|())|$.

Sempre nel caso di N dispari, sia \mathcal{B}_N^ℓ la base dello spazio dei diagrammi con N vertici e $\overline{\mathcal{B}}_N^\ell$ la base formata dagli elementi di \mathcal{B}_N^ℓ in cui il sito disaccoppiato si trova in posizione 1. A causa dell'invarianza per traslazioni, possiamo limitarci allo spazio generato da $\overline{\mathcal{B}}_N^\ell$.

4.1.2 Stato di Razumov-Stroganov

Consideriamo l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{TL} = \sum_{i=1}^N e_i \quad (4.11)$$

nella rappresentazione grafica (4.1). Sia per N pari che per N dispari è stato mostrato in [17, 39, 40] che l'hamiltoniana \mathcal{H}_{TL} ha autostato destro con autovalore massimo N ed i coefficienti di tale autostato sono interi positivi.

Ad esempio, per $N = 3, 5, 7$ si hanno i seguenti autostati con autovalore massimo

$$\begin{aligned} N = 3 : & \quad \overline{\text{diagramma}}, \\ N = 5 : & \quad \overline{\text{diagramma}} + 4 \overline{\text{diagramma}}, \\ N = 7 : & \quad \overline{\text{diagramma}} + 6 \overline{\text{diagramma}} + 14 \overline{\text{diagramma}} + 14 \overline{\text{diagramma}} + 49 \overline{\text{diagramma}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove la barra rappresenta, al solito, una combinazione invariante per traslazione $\overline{\text{diagramma}} = \text{diagramma} + \text{diagramma} + \text{diagramma}$.

4.1.3 Connessione con la catena XXZ

Abbiamo mostrato due rappresentazioni della medesima algebra (4.1): una grafica (4.8) ed una in termini di spin $\frac{1}{2}$ (4.3). Per $N = 2n + 1$ queste hanno la stessa dimensione $\mathcal{D}_n = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = (2n+1)\mathcal{C}_n$ [41].

Discutiamo adesso una corrispondenza naturale dalla base dei diagrammi alla base di spin $\frac{1}{2}$. Poiché ad esempio $e_2 \text{diagramma} = e_4 \text{diagramma} = \text{diagramma}$, è ragionevole far corrispondere uno stato di q -singoletto (4.6) ad una linea che connette due vertici vicini, mentre il sito disaccoppiato corrisponde a $|\downarrow\rangle$ per $S^z = -\frac{1}{2}$. Si verifica inoltre che l'azione dei generatori e_i su un generico diagramma è preservata facendo corrispondere ad ogni

connessione tra due qualsiasi vertici j e k uno stato di q -singoletto:

$$|u\rangle_{j,k} = q|\uparrow_j\downarrow_k\rangle + q^{-1}|\downarrow_j\uparrow_k\rangle. \quad (4.13)$$

Ad esempio, per $N = 7$,

$$e_3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}, \quad (4.14)$$

così come

$$e_3|\downarrow\rangle_1|u\rangle_{2,3}|u\rangle_{4,5}|u\rangle_{6,7} = |\downarrow\rangle_1|u\rangle_{2,5}|u\rangle_{3,4}|u\rangle_{6,7}, \quad (4.15)$$

nella rappresentazione (4.3). L'ordinamento tra j e k viene scelto, per convenzione, in modo che, partendo da j e proseguendo in senso orario fino a k non si incontri il sito disaccoppiato. Nella notazione delle parentesi quindi $(\)_k \rightarrow |u\rangle_{j,k}$.

L'applicazione non è però invertibile in generale; la base dei grafici infatti, pur essendo della stessa dimensione della base degli stati di spin con $S^z = -\frac{1}{2}$, non è ortogonale. Sia U_N la matrice $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n$ del cambiamento di base da \mathcal{B}_N^ℓ a \mathcal{B}_N^- . I nostri calcoli³ mostrano che U_N è singolare per $q = e^{\frac{i\pi}{6}}$. Ad esempio, la matrice di cambiamento di base da $\{\ominus, \odot, \otimes\}$ a $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$,

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & q & q^{-1} \\ q^{-1} & 0 & q \\ q & q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

è singolare per $q = \pm i, \pm e^{\pm i\pi/6}$. Inoltre, abbiamo trovato che in generale U_N è invertibile per q reali, ma diventa singolare per alcuni valori di q corrispondenti a

³Abbiamo calcolato esplicitamente tale matrice fino ad $N = 13$ ed abbiamo ottenuto che U_{2n+1} ha rango \mathcal{C}_{n+1} per $q \equiv e^{\frac{i\pi}{6}}$

radici dell'unità. Il numero di questi valori singolari cresce all'aumentare di N . Ad oggi non abbiamo però trovato una spiegazione di questo fatto.

Poiché questa applicazione non è invertibile, abbiamo, per N fissato, un'enorme quantità di combinazioni di grafici che, pur non essendo autostati dell'hamiltoniana (4.11), corrispondono allo stato di Razumov-Stroganov. Infatti, gli autostati $|\Psi_N^\ell\rangle$ di (4.11) con autovalore massimo vengono esattamente trasformati nello stato di Razumov-Stroganov nella base \mathcal{B}_N^- di spin $\frac{1}{2}$. Di conseguenza, qualsiasi altra combinazione $|\Psi_N^\ell\rangle + |K_N\rangle$, dove $|K_N\rangle \in \text{Ker } U_N$, viene trasformata nel medesimo stato. Riteniamo che ciò costituisca una notevole semplificazione per la ricerca di una formula ricorsiva che permetta di calcolare lo stato di Razumov-Stroganov per un certo N , noto lo stato per $N - 2$. Nella prossima sezione mostriamo i risultati di un nostro studio preliminare volto alla ricerca di una tale formula.

4.1.4 Formula ricorsiva per il calcolo dello stato di Razumov-Stroganov

Il calcolo esatto dello stato fondamentale della catena di spin XXZ è in generale un problema estremamente complicato. Le congetture di Razumov-Stroganov mostrano però che per $\Delta = -\frac{1}{2}$ si hanno numerose semplificazioni ed i coefficienti del possibile stato fondamentale sono calcolabili esplicitamente. Precisiamo però che, nonostante la struttura semplice dello stato di Razumov-Stroganov, le difficoltà tecniche relative al calcolo dei coefficienti Ψ_α permangono: restringersi allo spazio dei numeri interi permette di ottenere numericamente i coefficienti in maniera più rapida, ma non

è comunque stato trovato un procedimento efficiente. Nel paragrafo 5.2.1 descriviamo il funzionamento del nostro programma che ci ha permesso di calcolare tali coefficienti fino ad $N = 19$. Si tratta comunque di un processo di diagonalizzazione, seppur con le dovute semplificazioni, di una matrice le cui dimensioni crescono esponenzialmente con N .

In questa sezione introduciamo invece i risultati di un nostro studio preliminare volto alla ricerca di una formula ricorsiva; essa permetterebbe non solo di calcolare lo stato in modo efficiente, ma anche di capire meglio la struttura dello stato fondamentale e le stesse congetture di Razumov-Stroganov.

La connessione con il modello $O(1)$ porta alcune semplificazioni poiché, come descritto nella sezione precedente, ci sono molte combinazioni di grafici che corrispondono allo stato di Razumov-Stroganov.

Abbiamo trovato un procedimento grazie al quale si ricava lo stato di Razumov-Stroganov fino ad $N = 7$. Per $N = 9$ si ottengono coefficienti vicini: ad esempio 43 invece di $42 \equiv A_4$ per lo stato di tipo Néel.

Descriviamo adesso il procedimento ricorsivo. Per ogni “parola” di parentesi indichiamo con o_i e c_i rispettivamente le posizione, nella parola, dell’ i -esima parentesi aperta e chiusa. Diciamo che le parentesi in posizione o_i e c_i (stesso indice i) sono accoppiate o abbinare.

- 1: Sia $\mathcal{S}_1 = \{|\}$.
- 2: Per ogni \mathcal{S}_N si costruisce \mathcal{S}_{N+2} nel modo seguente :
- 3: Per ogni elemento $s \in \mathcal{S}_N$:

- 4: Calcoliamo le posizioni o_i e c_i ($i = 1, \dots, n$) delle parentesi in s rispetto alla posizione della barra.
- 5: Sia $g(s)$ la funzione che sostituisce all'unica barra “|” presente in s i caratteri “)|(”. Inseriamo $g(s)$ in \mathcal{S}_{N+2} .
- 6: Per ogni coppia di parentesi abbinate (o_i, c_i) di s :
- 7: Sia s' uguale ad s con le due parentesi in posizione o_i e c_i invertite, si pone “(” in c_i e “)” in o_i . Inseriamo $g(s')$ in \mathcal{S}_{N+2} . Osserviamo che, in questo modo, la parentesi “)” in posizione o_i è accoppiata alla parentesi “(” aggiunta da $g()$.
- 8: Fine ciclo
- 9: Fine ciclo
- 10: Fine ciclo

Dai nostri calcoli numerici appare che il procedimento ricorsivo descritto sopra permette di generare tutti i grafici indipendenti di $\overline{\mathcal{B}}_{N+2}^\ell$, dati i grafici indipendenti di $\overline{\mathcal{B}}_N^\ell$. Ad esempio mostriamo il passaggio $7 \rightarrow 9$,

$$\text{Diagram 1} \longrightarrow \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}, \quad (4.17)$$

$$\text{Diagram 6} \longrightarrow \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10}, \quad (4.18)$$

$$\text{Diagram 11} \longrightarrow \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15}, \quad (4.19)$$

$$\text{Diagram 16} \longrightarrow \text{Diagram 17} + \text{Diagram 18} + \text{Diagram 19} + \text{Diagram 20}, \quad (4.20)$$

$$\text{Diagram 21} \longrightarrow \text{Diagram 22} + \text{Diagram 23} + \text{Diagram 24} + \text{Diagram 25}, \quad (4.21)$$

dove possiamo riconoscere tutti i 14 grafici indipendenti della figura 4.2.

È sorprendente che il semplice procedimento descritto sopra, non solo permetta di generare ricorsivamente i grafici indipendenti per ogni N , ma per $N = 3, 5, 7$ permetta anche di trovare i corretti coefficienti dello stato di Razumov-Stroganov. Notiamo però che nella base \mathcal{B}_N^ℓ dei grafici, gli stati presenti in \mathcal{S}_N non formano lo stato di Razumov-Stroganov, cioè

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}_N} \overline{|s\rangle}, \quad (4.22)$$

non porta ad i coefficienti (4.12) ed in generale non è neanche autostato di \mathcal{H}_{TL} . Riotteniamo lo stato di Razumov-Stroganov soltanto dopo il collegamento col modello a spin, in virtù della grande varietà di stati (nella rappresentazione grafica) che corrispondono allo stato di Razumov-Stroganov.

Dato \mathcal{S}_N si calcola dunque lo stato di Razumov-Stroganov

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}_N} U_N \overline{|s\rangle}, \quad (4.23)$$

dove U_N è la matrice di cambiamento di base, descritta nella sezione precedente, dallo spazio dei grafici del modello $O(1)$ allo spazio degli stati formati da N spin con $S^z = -\frac{1}{2}$.

4.2 Modello supersimmetrico su reticolo di fermioni “hard-core”

In [42, 43] viene evidenziata una connessione tra l'hamiltoniana XXZ con parametro d'anisotropia $\Delta = -\frac{1}{2}$ ed un'hamiltoniana supersimmetrica ($\mathcal{N} = 2$) su reticolo.

Questo modello descrive fermioni *hard-core* su un reticolo unidimensionale ed i generatori supersimmetrici sono legati agli operatori di creazione e distruzione di tali fermioni. Il termine *hard-core* si riferisce ad un'interazione forte, a corto raggio, tale da impedire l'occupazione di due siti adiacenti.

4.2.1 Meccanica quantistica supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$

La supersimmetria (SUSY) è un'estensione delle usuali simmetrie spazio temporali, tale da includere una simmetria tra fermioni e bosoni. Noi ci riferiremo alla cosiddetta meccanica quantistica supersimmetrica [44, 45], in cui l'algebra di Poincaré si riduce a quella delle traslazioni temporali.

Nel caso di SUSY $\mathcal{N} = 2$ si hanno due generatori fermionici (supercariche) Q^+ e Q^- , hermitiani coniugati e nilpotenti: $(Q^+)^\dagger = Q^-$, $(Q^\pm)^2 = 0$. L'hamiltoniana deve essere uno dei generatori dell'algebra supersimmetrica e si costruisce semplicemente come anti-commutatore delle supercariche

$$\mathcal{H} = \{Q^+, Q^-\}. \quad (4.24)$$

L'algebra SUSY $\mathcal{N} = 2$ include un ulteriore generatore bosonico, il numero fermionico F , che soddisfa

$$[F, Q^+] = Q^+, \quad [F, Q^-] = -Q^-. \quad (4.25)$$

Per costruzione, la supersimmetria è una simmetria dell'hamiltoniana, infatti

$$[Q^\pm, \mathcal{H}] = 0, \quad (4.26)$$

per la nilpotenza delle supercariche; per lo stesso motivo si ha anche

$$[F, \mathcal{H}] = 0, \quad (4.27)$$

ed il numero fermionico è conservato. I generatori fermionici Q^+ , Q^- e bosonici \mathcal{H} , F con l'algebra (4.24)-(4.27) definiscono la meccanica quantistica $\mathcal{N} = 2$.

Poiché $\langle \psi | \mathcal{H} | \psi \rangle = |Q^+ | \psi \rangle|^2 + |Q^- | \psi \rangle|^2 \geq 0$, tutti gli autovalori E dell'hamiltoniana (4.24) soddisfano $E \geq 0$. Gli autospazi di (4.24), per la (4.27), costituiscono rappresentazioni o di singoletto o di doppietto dell'algebra supersimmetrica. In particolare, per ogni $E > 0$ fissato, le rappresentazioni irriducibili dell'algebra (4.24)-(4.27) sono bidimensionali⁴ e possono essere rappresentate nel doppietto $|\psi^\pm\rangle$, dove $Q^+ |\psi^-\rangle = |\psi^+\rangle$ e $Q^- |\psi^-\rangle = 0$. Viceversa, un autostato $|\psi\rangle$ ha autovalore $E = 0$ se e solo se è un singoletto supersimmetrico: $Q^+ |\psi\rangle = Q^- |\psi\rangle = 0$. Gli stati fondamentali dell'hamiltoniana supersimmetrica sono dunque gli stati $|\psi\rangle$ che soddisfano $Q^+ |\psi\rangle = 0$ e non possono essere scritti nella forma $|\psi\rangle = Q^+ |\psi'\rangle$, per qualche $|\psi'\rangle$.

Dalle relazioni (4.25) segue che Q^+ è un operatore di creazione fermionico. Di conseguenza i doppietti supersimmetrici sono formati da due stati con autovalore diverso del numero fermionico F : se $|\psi^-\rangle$ ha autovalore f , allora $|\psi^+\rangle$ ha autovalore $f + 1$.

Una quantità importante in una teoria supersimmetrica è l'indice di Witten

$$W = \text{Tr} [(-1)^F e^{-\beta \mathcal{H}}]. \quad (4.28)$$

⁴Sia $|\psi\rangle$ un qualsiasi autostato di (4.24) con autovalore $E > 0$, allora la rappresentazione quadrimensionale $(|\psi\rangle, Q^+ |\psi\rangle, Q^- |\psi\rangle, Q^+ Q^- |\psi\rangle)$ è riducibile. Sia $|\psi^-\rangle = |\psi\rangle - \frac{Q^+ Q^-}{E} |\psi\rangle$, allora $Q^- |\psi^-\rangle = 0$ e $(|\psi^-\rangle, Q^+ |\psi^-\rangle)$ e $(Q^- |\psi\rangle, Q^+ Q^- |\psi^-\rangle)$ formano due doppietti irriducibili.

Si dimostra che l'indice W è una quantità topologica e quindi non può dipendere da β . In particolare, per $\beta \rightarrow \infty$

$$W = \sum_{\{s.f.\}} (-1)^F, \quad (4.29)$$

dove la somma va intesa sui soli stati con $E = 0$. Per $\beta = 0$ si ha invece $W = \text{Tr}[(-1)^F]$ e dunque la somma è estesa a tutti i possibili autostati di (4.24). Si noti dunque che l'indipendenza dell'indice di Witten dal parametro β dà un'ulteriore dimostrazione del fatto che gli stati con $E > 0$ formino doppietti, di supersimmetria, con valore opposto di $(-1)^F$.

L'indice di Witten permette dunque di fare alcune considerazioni sulla degenerazione dello stato fondamentale. In particolare, se $W \neq 0$ abbiamo almeno $|W|$ stati con $E = 0$: per $W > 0$ (rispettivamente $W < 0$) si hanno $|W|$ stati fondamentali fermionici (rispettivamente bosonici) più altri eventuali stati fondamentali, in numero pari, per metà fermionici e per metà bosonici.

4.2.2 Modello supersimmetrico su reticolo

Consideriamo ora un reticolo unidimensionale con L siti e condizioni periodiche al contorno. Il modello riguarda una singola specie di fermioni c_i , i quali possono occupare le posizioni $i = 1, \dots, L$ del reticolo. Gli operatori c_i obbediscono alle usuali relazioni di anti-commutazione $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ e $F = \sum_i c_i^\dagger c_i$ conta il numero di fermioni del reticolo. Imponiamo la restrizione *hard-core* per cui due fermioni non sono ammessi su siti adiacenti. Un fermione *hard-core* è creato dall'operatore $d_i^\dagger = \mathcal{P}_{i-1} c_i^\dagger \mathcal{P}_{i+1}$ dove gli operatori $\mathcal{P}_{i\pm 1}$ implementano il vincolo che i siti adiacenti

a i siano vuoti: $\mathcal{P}_j = 1 - c_j^\dagger c_j$. Si hanno le seguenti relazioni di anti-commutazione:

$$\{d_i, d_j\} = \{d_i^\dagger, d_j^\dagger\} = 0, \quad (4.30a)$$

$$\{d_i, d_j^\dagger\} = 0 \quad |i - j| \geq 2, \quad (4.30b)$$

$$\{d_i, d_j^\dagger\} = d_j^\dagger d_i \quad |i - j| = 1, \quad (4.30c)$$

$$\{d_i, d_i^\dagger\} = \mathcal{P}_{i-1} \mathcal{P}_{i+1}. \quad (4.30d)$$

I generatori supersimmetrici sono combinazioni particolari degli operatori fermionici di creazione e distruzione. C'è una certa libertà nella definizione di Q^\pm , purché si mantenga la struttura algebrica (4.24)-(4.27). Definiamo i generatori supersimmetrici come

$$Q^+ = \sum_{i=1}^L d_i^\dagger, \quad Q^- = \sum_{i=1}^L d_i. \quad (4.31)$$

Usando le relazioni (4.30) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^L \left(d_{i+1}^\dagger d_i + d_i^\dagger d_{i+1} + \mathcal{P}_{i-1} \mathcal{P}_{i+1} \right) = \\ &= \sum_{i=i}^L \left(d_{i+1}^\dagger d_i + d_i^\dagger d_{i+1} + d_i^\dagger d_i d_{i+2}^\dagger d_{i+2} \right) + L - 2f, \end{aligned} \quad (4.32)$$

dove f è il numero di fermioni sul reticolo, ossia l'autovalore di F . L'hamiltoniana (4.32) è formata da un termine cinetico che muove i fermioni sul sito adiacente (seguendo il vincolo *hard-core*), e da un termine di interazione tra secondi vicini. Quest'ultimo favorisce stati con un fermione ogni tre siti; l'aggiunta di un altro fermione fa sì che due fermioni siano distanti due siti ed aumenta l'energia.

Lo stato con un sito occupato ogni tre

$$\dots \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \dots \quad (4.33)$$

ricorda lo stato di Néel per l'hamiltoniana anti-ferromagnetica di Heisenberg. Non è un autostato; ci aspettiamo però, così come per lo stato di Néel, che esso sia la principale componente dello stato fondamentale.

Nel caso in cui il reticolo abbia condizioni al contorno periodiche un conteggio esplicito mostra che

$$W(L) = \begin{cases} (-1)^{L+1} & \text{per } L = 1, L = 2 \\ -2 & \text{per } L = 3 \end{cases} \quad (4.34)$$

e $W(L + 3) = -W(L)$. Possiamo inoltre restringerci a settori con uno specifico autovalore t dell'operatore di traslazione \mathcal{T} e dunque con impulso fissato. Poiché $\mathcal{T}^L = 1$, si ha $t = e^{2i\pi\frac{\ell}{L}}$, $\ell = 1, \dots, L$. Per $L = 3p$ si ha $|W| = 2$ mentre in settori a impulsi fissato

$$W_t(L) = \begin{cases} (-1)^L & \text{per } t = (-1)^{L+1} e^{2\pi i\frac{j}{3}}, \quad j = 1, 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.35)$$

Per $L \neq 3p$ invece

$$W_t(L) = \begin{cases} (-1)^{L+1} & \text{per } t = (-1)^{L+1} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4.36)$$

4.2.3 Connessione con la catena XXZ

Descriviamo adesso il collegamento con l'hamiltoniana XXZ. Si passa dalla catena fermionica con L siti, di cui f occupati, ad una catena di spin con $N = L - f$ siti, f spin su e $L - 2f$ spin giù nel modo seguente: mettiamo uno spin giù nello spazio

tra due siti vuoti e uno spin su nei siti occupati.

$$\dots \circ \bullet \circ \circ \bullet \circ \dots \longrightarrow \dots \uparrow \downarrow \uparrow \dots \quad (4.37)$$

Il collegamento porterebbe però al medesimo risultato anche se avessimo fatto corrispondere ad un fermione uno spin giù. Si verifica allora che l'azione del termine cinetico sul reticolo fermionico è equivalente all'azione dell'operatore $\sum_{j=1}^N \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+$ sulla catena di spin, mentre il termine di potenziale diviene $\sum_{j=1}^N (1 - \sigma_j^z)/2 + (1 + \sigma_j^z)(1 + \sigma_{j+1}^z)/4$ che conta il numero di spin giù e il numero di spin su adiacenti. L'hamiltoniana (4.32) diviene dunque

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \frac{1}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right) + \frac{3N}{4}. \quad (4.38)$$

Se il collegamento fosse esatto, poiché (4.38) ha autovalore minimo nullo, sarebbe dimostrato che lo stato fondamentale dell'hamiltoniana XXZ con $\Delta = -\frac{1}{2}$ ha energia $E = -3N/4$, esattamente come lo stato di Razumov-Stroganov (c'è un fattore $\frac{1}{2}$ globale in $\tilde{\mathcal{H}}$).

L'hamiltoniane (4.32) e (4.38) non hanno però lo stesso spettro, neanche in settori con un numero fissato di fermioni. Infatti, un conteggio esplicito mostra che lo spazio di Hilbert di una catena fermionica di L siti e f fermioni ha dimensione $\frac{L}{f} \binom{L-f-1}{f-1}$ mentre la dimensione dello spazio di Hilbert del corrispondente settore nella catena di spin ($N = L - f$ siti ed f spin su) è $\binom{L-f}{f}$.

Possiamo ovviare a questo problema imponendo che un determinato sito della catena fermionica (ad esempio il primo sito) debba essere vuoto. In tal caso si verifica che la dimensione gli spazi di Hilbert nel settore con un numero di fermioni (spin

su) fissati è pari a $\binom{L-f}{f}$. L'azione dell'hamiltoniana (4.32) può però portare un fermione nel primo sito. La procedura che è stata proposta in [43] per ovviare a questo problema è piuttosto laboriosa. Sia H lo spazio di Hilbert della catena fermionica, fissati L e f . Sia inoltre $H_t \subset H$ il settore con autovalore fissato t dell'operatore di traslazione e $H_o \subset H$ lo spazio di Hilbert della catena col vincolo che la prima posizione sia vuota. Parliamo per semplicità di traslazione destra riferendoci all'azione dell'operatore di traslazione \mathcal{T} e di traslazione sinistra riferendoci all'azione di \mathcal{T}^{-1} . All'interno di ogni settore H_t uno stato col primo sito occupato può essere visto come t volte la sua traslazione sinistra o t^{-1} volte la sua traslazione destra. Se l'hamiltoniana, agendo su uno stato di H_o , sposta un fermione dal secondo sito al primo sito, all'interno del settore H_t si può visualizzare lo stato ottenuto come t volte la sua traslazione sinistra. Ricordiamo che in H_o un fermione sul secondo sito corrisponde ad uno spin sul primo sito della catena XXZ (al primo sito vuoto non corrisponde nessuno spin, si veda (4.37)). Il tutto corrisponde quindi allo scambio dello spin su dal primo all'ultimo sito, lasciando il resto della catena invariato. Se il numero f di fermioni è pari, dobbiamo considerare anche un segno meno addizionale per tener conto della permutazione ciclica dei fermioni in questa mossa. Restringsendoci dunque allo spazio $\tilde{H}_t = H_o \cap H_t$, si può emulare questo comportamento nella hamiltoniana (4.38) prendendo le condizioni al contorno

$$\sigma_{N+1}^+ = (-1)^{f+1} t \sigma_1^+, \quad \sigma_{N+1}^- = (-1)^{f+1} t^{-1} \sigma_1^-. \quad (4.39)$$

Notiamo inoltre che nella catena di spin, gli autovalori t non soddisfano le usuali relazioni $t^N = 1$, ma piuttosto quelle della corrispondente catena fermionica $t^L = 1$. Con

queste modifiche lo spettro di (4.38), nell'appropriato settore fissato dall'impulso dello stato, corrisponde esattamente a quello della catena fermionica.

Notiamo quindi che il collegamento non porta esattamente all'hamiltoniana di Razumov-Stroganov (2.15). Sia il segno della parte cinetica che le condizioni al contorno sono diverse.

Tuttavia nell'articolo [18] Razumov e Stroganov hanno esteso le loro congetture anche per condizioni al contorno diverse. Introduciamo brevemente tale estensione in quanto permette di introdurre alcuni schemi risolutivi che poi applicheremo al caso con condizioni al contorno periodiche. Sia dunque \mathcal{H}' l'hamiltoniana di Razumov-Stroganov (2.15) con condizioni al contorno

$$\sigma_{N+1}^+ = e^{2\pi i/3} \sigma_1^+, \quad \sigma_{N+1}^- = e^{-2\pi i/3} \sigma_1^+, \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z. \quad (4.40)$$

Si ha allora la seguente

Congettura 6 (Razumov-Stroganov). *Lo stato fondamentale dell'hamiltoniana \mathcal{H}' , per N pari, ha energia $E = -3N/2$ e magnetizzazione $S^z = 0$.*

Discutiamo adesso come la supersimmetria fornisca un'interessante interpretazione di questo risultato; successivamente, proviamo ad applicare gli stessi schemi al caso di nostro interesse, ossia numero dispari di siti e condizioni al contorno periodiche.

Il risultato della congettura 6 si può infatti dedurre in base al collegamento con la supersimmetria. Sulla base di considerazioni qualitative abbiamo già discusso come lo stato fondamentale supersimmetrico debba essere composto dagli stati con

un fermione ogni tre siti. Poiché $[\mathcal{H}, F] = 0$ si ha dunque $L = 3f$. L'indice di Witten (4.35) assicura allora che ci sarà almeno uno stato fondamentale nel settore $t = (-1)^{3f+1}e^{2\pi i/3} = (-1)^{f+1}e^{2\pi i/3}$. Se ci restringiamo a tale settore il modello supersimmetrico viene trasformato esattamente nel modello descritto dall'hamiltoniana di spin $\tilde{\mathcal{H}}$ (4.38) con $N = 2f$ siti (f spin su e f spin giù) e condizioni al contorno

$$\sigma_{N+1}^+ = e^{2\pi i/3}\sigma_1^+, \quad \sigma_{N+1}^- = e^{-2\pi i/3}\sigma_1^+, \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z. \quad (4.41)$$

Sia U_Y la trasformazione unitaria descritta nel capitolo 2 che, per N pari, manda $\mathcal{H}_{XXZ}(\Delta)$ in $-\mathcal{H}_{XXZ}(-\Delta)$. Per N pari quindi $\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}U_Y^\dagger \mathcal{H}' U_Y + \frac{3N}{4}$.

Dunque, poiché lo stato fondamentale di $\tilde{\mathcal{H}}$ ha autovalore nullo, la supersimmetria dà una spiegazione della congettura 6, partendo da un modello supersimmetrico su una catena di $L = 3f$ siti occupata da f fermioni.

Osserviamo inoltre che si arriva allo stesso risultato partendo direttamente dall'hamiltoniana \mathcal{H}' con N pari e ricordando che S^z deve essere nullo. In tale settore si fa corrispondere la catena di spin alla catena fermionica con $L = 3N/2$ siti e, con le stesse argomentazioni di sopra, si dimostra che lo stato fondamentale ha energia $-3N/2$.

Per quanto riguarda il modello cui siamo interessati, con N dispari e condizioni al contorno periodiche, argomentazioni analoghe sono più complicate. Innanzi tutto per N dispari la trasformazione U_Y non fa corrispondere alla (4.38) la (2.15): l'operatore $\sigma_N^+\sigma_1^- + \sigma_N^-\sigma_1^+$ non cambia segno. Recuperiamo l'hamiltoniana di Razumov-

Stroganov soltanto cambiando le condizioni al contorno in $\sigma_{N+1}^{\pm} = -\sigma_1^{\pm}$, che sono però diverse da quelle a cui siamo interessati.

Assumendo però che si possa trovare una trasformazione che faccia corrispondere a (4.38) l'hamiltoniana di Razumov-Stroganov (2.15), discutiamo le possibili conseguenze della supersimmetria. Consideriamo il settore $S^z = -\frac{1}{2}$. Dato $N = 2n + 1$ associamo un fermione ad uno spin su o ad uno spin giù in modo che ogni volta $f + 1$ sia pari. In tal caso infatti le condizioni al contorno (4.39) nel settore a impulso nullo ($t = 1$) sono le condizioni periodiche. Per n dispari facciamo quindi corrispondere ad un fermione uno spin su, dunque $L = 3f + 1$. Viceversa, per n pari facciamo corrispondere ad un fermione uno spin giù, dunque $L = 3f + 2$. Solo in quest'ultimo caso però, l'indice di Witten (4.36) ci assicura che ci sia almeno uno stato fondamentale nel settore a impulso nullo.

Inoltre, l'hamiltoniana supersimmetrica (4.24) ha l'importante caratteristica che lo stato fondamentale $|\psi\rangle$ è annichilato dai due generatori fermionici, $Q^{\pm}|\psi\rangle = 0$. Abbiamo provato ad usare questa proprietà per spiegare le caratteristiche dello stato di Razumov-Stroganov e la sua natura combinatoria, ma purtroppo la non chiara corrispondenza tra i due spazi di Hilbert e le diverse condizioni al contorno non ci hanno permesso di ottenere risultati di facile interpretazione.

CAPITOLO 5

Entanglement nello stato di Razumov-Stroganov

5.1 Entanglement tra primi vicini

In questa sezione usiamo i risultati esatti di Stroganov [16] per calcolare lo one-tangle e la concurrence a primi vicini.

Poiché lo stato di Razumov-Stroganov ha un valore fissato di S^z e coefficienti positivi, la matrice densità ridotta di due spin (3.33) ha la forma

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij} & c_{ij} & 0 \\ 0 & c_{ij} & e_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{ij} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

La quantità C'' è sempre negativa¹, quindi lo stato di Razumov-Stroganov può avere

¹Si veda il paragrafo 3.5.1

soltanto entanglement antiparallelo e la concurrence è data da

$$C_{ij} = 2 \max\{0, C'_{ij}\}, \quad (5.2)$$

dove

$$C'_{ij} = |c_{ij}| - \sqrt{a_{ij}d_{ij}} = \frac{1}{4} |\langle \sigma_i^x \sigma_j^x \rangle + \langle \sigma_i^y \sigma_j^y \rangle| - \frac{1}{4} \sqrt{(1 + \langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle)^2 - 4M_z^2}. \quad (5.3)$$

Consideriamo lo stato di Razumov-Stroganov con $N = 2n + 1$ siti e $S^z = -\frac{1}{2}$.

Essendo la magnetizzazione pari a

$$M_z = -\frac{1}{2N}, \quad (5.4)$$

lo one-tangle è dato da

$$\tau = \left(1 - \frac{1}{N^2}\right). \quad (5.5)$$

Utilizzando le espressioni (2.21), (2.22) per le funzioni di correlazione a primi vicini, si ottiene la concurrence a primi vicini

$$C_{i,i+1} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8N^2} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{10}{N^2} + \frac{9}{N^4}}. \quad (5.6)$$

Per ogni N , sia lo one-tangle che la concurrence a primi vicini sono non nulli. Lo stato di Razumov-Stroganov è dunque entangled. Inoltre, all'aumentare del numero di siti, si ha che ogni singolo spin è sempre più entangled con il resto del sistema, mentre l'entanglement con i primi vicini diminuisce fino al valore asintotico 0.375. Questo segnala una redistribuzione dell'entanglement che, considerando la proprietà di monogamia (3.21), può realizzarsi attraverso meccanismi sostanzialmente diversi: un aumento dell'entanglement bipartito dovuto all'accensione della concurrence tra siti sempre più distanti, come nel caso del modello studiato in [4], oppure una variazione globale con conseguente aumento dell'entanglement multipartito.

5.2 Procedimento numerico per il calcolo dell'entanglement

Per avere ulteriori indicazioni sulla struttura dello stato di Razumov-Stroganov, in particolare per un'analisi più dettagliata del rapporto fra entanglement bipartito a lungo raggio ed entanglement multipartito, sono necessarie le funzioni di correlazione per $r > 1$, tramite le quali si calcola la concurrence (5.2), e la matrice densità ridotta di un sottoinsieme degli spin della catena, necessaria per il calcolo dell'entropia di Von Neumann.

La forma nota dello stato di Razumov-Stroganov permette di determinare tali quantità esplicitamente, in funzione dei coefficienti Ψ_α dello stato fondamentale. Abbiamo dunque implementato alcuni programmi che eseguono in maniera esatta le operazioni necessarie. Un primo programma calcola lo stato di Razumov-Stroganov per un generico N dispari, determinando quindi tutti gli Ψ_α . Un altro valuta le funzioni di correlazione $\langle \sigma_i^z \sigma_{i+r}^z \rangle$ e $\langle \sigma_i^+ \sigma_{i+r}^- \rangle$ calcolando esplicitamente il valore di aspettazione del prodotto di due matrici di Pauli sullo stato di Razumov-Stroganov. Un ulteriore programma, infine, calcola la matrice densità ridotta di un qualsiasi sottoinsieme di spin della catena.

I risultati di questi programmi sono **esatti**, non approssimati. I coefficienti Ψ_α dell'espansione dello stato di Razumov-Stroganov nella base \mathcal{B}_N^- sono numeri interi, mentre le funzioni di correlazione e gli elementi della matrice densità ridotta sono invece numeri razionali.

Tramite le funzioni di correlazione si calcolano poi la concurrence (3.35) e le probabilità di trovare due spin in una certa configurazione (3.39). Dalla matrice densità ridotta si ottiene invece l'entropia di entanglement (3.10) relativa ad una qualsiasi bipartizione degli spin della catena.

Descriviamo ora brevemente il funzionamento dei tre programmi, rimandando all'appendice A per i dettagli.

5.2.1 Calcolo dello stato di Razumov-Stroganov

Siamo interessati al calcolo dei coefficienti Ψ_α dello stato di Razumov-Stroganov per un certo N

$$|\Psi\rangle = \sum_{|\alpha\rangle \in \overline{\mathcal{B}}_N^-} \Psi_\alpha \overline{|\alpha\rangle}. \quad (5.7)$$

Mostriamo che non è necessario diagonalizzare esplicitamente l'hamiltoniana $2^N \times 2^N$ dimensionale. Infatti, poiché S^z commuta con \mathcal{H} , possiamo restringerci allo spazio degli stati con $S^z = -\frac{1}{2}$, dunque alla base \mathcal{B}^- . L'invarianza per traslazioni dà un'ulteriore semplificazione poiché permette di considerare soltanto lo spazio quoziente rispetto alla relazione di equivalenza.

Se facciamo agire \mathcal{H} sugli stati $|\alpha\rangle \in \overline{\mathcal{B}}^-$, otteniamo una combinazione di stati che in generale non appartengono a $\overline{\mathcal{B}}^-$

$$\mathcal{H}|\alpha\rangle = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} |\beta\rangle. \quad (5.8)$$

Quando l'hamiltoniana \mathcal{H} agisce invece sullo stato di Razumov-Stroganov, agisce ogni volta su una combinazione di stati $\overline{|\alpha\rangle}$ invariante per traslazioni. Inoltre, poiché

l'operatore di traslazione commuta con \mathcal{H} , si ha $\mathcal{H}|\overline{\alpha}\rangle = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta}|\overline{\beta}\rangle$. Di conseguenza, è lecito limitarsi allo spazio $\overline{\mathcal{B}}$: in tal caso gli stati $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ in (5.8) rappresentano l'intera classe di equivalenza. Difatti, per ogni $|\beta\rangle$ in (5.8), esiste uno stato $|\alpha'\rangle$ in $\overline{\mathcal{B}}$ tale che il numero di traslazioni di un sito necessarie per arrivare ad uno stato di $\overline{\mathcal{B}}$ è lo stesso che per $|\beta\rangle$. "Ciclicizzando" otteniamo dunque il risultato completo.

Il funzionamento del programma è descritto in dettaglio nell'appendice A.1. Notiamo che, in questo modo, calcoliamo lo stato di Razumov-Stroganov **esattamente**.

Abbiamo così ottenuto gli stati di Razumov-Stroganov per $3 \leq N \leq 19$. Per $N = 21$ è necessario diagonalizzare una matrice $\mathcal{C}_{10} \times \mathcal{C}_{10} = 16796 \times 16796$, operazione per la quale sono necessarie risorse di calcolo maggiori di quelle a nostra disposizione.

5.2.2 Calcolo delle funzioni di correlazione

Sia $N = 2n + 1$ e $|\Psi_N\rangle$ lo stato di Razumov-Stroganov per un certo N (5.7). Le funzioni di correlazione sono date da

$$g_{0r}^{ab} = \langle \sigma_0^a \sigma_r^b \rangle = \frac{\langle \Psi_N | \sigma_0^a \sigma_r^b | \Psi_N \rangle}{\mathcal{N}_n^2}. \quad (5.9)$$

Poiché $|\Psi_N\rangle$ è invariante per traslazioni si ha che

$$g_{0r}^{ab} = \frac{1}{\mathcal{N}_n^2} \left(\langle \Psi_N | \sum_{j=1}^N \sigma_j^a \sigma_{j+r}^b \sum_{|\alpha\rangle \in \overline{\mathcal{B}}_N} \Psi_\alpha |\alpha\rangle \right). \quad (5.10)$$

Per le simmetrie dell'hamiltoniana XXZ (2.15), le uniche due funzioni di correlazione indipendenti e non banali sono g_{0r}^{zz} e g_{0r}^{+-} . Dall'invarianza per rotazioni attorno all'asse z , $g_{0r}^{+-} = g_{0r}^{-+} = \frac{1}{2}g_{0r}^{xx} = \frac{1}{2}g_{0r}^{yy}$.

Il calcolo delle funzioni di correlazione trasverse g_{0r}^{+-} è descritto in dettaglio

nell'appendice A.2. Consideriamo adesso il calcolo delle funzioni di correlazione longitudinali g_{0r}^{zz} . Poiché ogni $|\alpha\rangle$ è autostato di $\sigma_0^z \sigma_r^z$ si ha che

$$g_{0r}^{zz} = \frac{1}{\mathcal{N}_n^2} \left(\sum_{\alpha} \sum_{j=1}^N c_{j,j+r}^{\alpha} \Psi_{\alpha}^2 \right), \quad (5.11)$$

dove $c_{j,j+r}^{\alpha}$ vale 1 se gli spin di $|\alpha\rangle$ in posizione $j, j+r$ (modulo N) sono paralleli e vale -1 se sono antiparalleli. Non analizziamo l'implementazione di un programma per il calcolo di questa quantità poiché è molto semplice.

I risultati del calcolo esatto delle funzioni di correlazione dello stato di Razumov-Stroganov sono stati inseriti nell'appendice B, per non appesantire la lettura.

5.2.3 Calcolo della matrice densità ridotta

Consideriamo ancora la catena (2.15) per un certo $N = 2n + 1$. Nell'appendice A.3 viene mostrato il procedimento per il calcolo della matrice densità ridotta relativa agli spin in posizione $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, con $m < N$, quando la catena si trova nello stato di Razumov-Stroganov (5.7).

Abbiamo così ottenuto la matrice densità ridotta nella base standard di m spin $\frac{1}{2}$, $\{\uparrow\uparrow\dots\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow\dots\uparrow\downarrow, \uparrow\uparrow\dots\downarrow\uparrow, \uparrow\uparrow\dots\downarrow\downarrow, \dots, \downarrow\downarrow\dots\downarrow\downarrow\}$. Con essa, grazie a *quantum-octave*², possiamo calcolare l'entropia di entanglement di una qualsiasi bipartizione degli spin dello stato di Razumov-Stroganov.

²<http://quantum-octave.sourceforge.net/>

5.3 Funzioni di correlazione

Prima di passare allo studio delle proprietà di entanglement analizziamo qualitativamente le funzioni di correlazione che abbiamo ottenuto³.

In virtù dell'invarianza per traslazioni, le funzioni di correlazione non dipendono dalla posizione dei due spin nel reticolo ma soltanto dalla loro distanza r . Grazie ai nostri dati ed ai valori asintotici ottenuti in [46, 47] abbiamo congetturato i seguenti andamenti:

$$\langle \sigma_j^z \sigma_{j+2}^z \rangle = \frac{7}{2^6} - \frac{3}{2^6} \left(\frac{227 + 22N^2}{N^2(N^2 - 4)} \right) \quad (5.12)$$

$$\langle \sigma_j^+ \sigma_{j+2}^- \rangle = \frac{41}{2^8} + \frac{105}{2^8} \left(\frac{1 + 2N^2}{N^2(N^2 - 4)} \right) \quad (5.13)$$

$$\langle \sigma_j^z \sigma_{j+3}^z \rangle = -\frac{401}{2^{12}} + \frac{45}{2^{12}} \left(\frac{-2205 + 5324N^2 + 26N^4 + 212N^6}{N^4(N^2 - 4)^2} \right) \quad (5.14)$$

$$\langle \sigma_j^+ \sigma_{j+3}^- \rangle = \frac{4399}{2^{15}} + \frac{9}{2^{15}} \left(\frac{-11025 + 1276N^2 - 7358N^4 + 4516N^6}{N^4(N^2 - 4)^2} \right) \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j^z \sigma_{j+4}^z \rangle = & \frac{184453}{2^{22}} - \frac{3}{2^{22}N^4(N^2 - 16)(N^2 - 4)^3} \left(16094658825 - \right. \\ & - 4071808726N^2 + 1675416103N^4 - 269157300N^6 + \\ & \left. + 41497687N^8 + 2281766N^{10} \right) \quad (5.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j^+ \sigma_{j+4}^- \rangle = & \frac{1751531}{2^{24}} + \frac{3}{2^{24}N^4(N^2 - 16)(N^2 - 4)^3} \left(4695690825 + \right. \\ & + 2413434266N^2 - 276248393N^4 + 556663980N^6 - \\ & \left. - 134362697N^8 + 10926614N^{10} \right) \quad (5.17) \end{aligned}$$

³Si veda l'appendice B

Scomponendo in fattori i denominatori delle funzioni di correlazione per r fissato, ci siamo infatti accorti che questi hanno un andamento semplice in funzione di N . Ad esempio, abbiamo ottenuto che il denominatore di $\langle \sigma_j^z \sigma_{j+2}^z \rangle$ ha una dipendenza da N della forma $N^2(N^2 - 4)$. Abbiamo così espanso la funzione,

$$\langle \sigma_j^z \sigma_{j+2}^z \rangle = a_0 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N-2} + \frac{a_4}{N+2}, \quad (5.18)$$

ed abbiamo calcolato i coefficienti a_i . Per $r = 2, 3$ abbiamo ottenuto gli stessi valori asintotici ricavati con tecniche di *Bethe Ansatz* in [46, 47]. All'aumentare di r però, cresce il numero di fattori e contemporaneamente diminuiscono i dati a nostra disposizione. Abbiamo quindi limitato il numero di coefficienti a_i in base a considerazioni sui risultati che avevamo già ottenuto. Abbiamo ad esempio supposto che le funzioni di correlazione non dipendano esplicitamente da N , ma soltanto da N^2 (nella scomposizione (5.18) si ha infatti $a_1 = 0$ e $a_3 = -a_4$).

Descriviamo ora i risultati che abbiamo ottenuto per $r = 4$. Il denominatore ha una dipendenza da N della forma $N^4(N^2 - 16)(N^2 - 4)^3$, che è un polinomio di grado 12. Abbiamo così espanso il numeratore nella forma $\sum_{k=0}^6 a_k N^{2k}$, dove il valore asintotico a_6 è noto dai risultati [46, 47], e con l'aiuto di MATHEMATICA abbiamo ottenuto i coefficienti a_0, \dots, a_5 . Per $r = 5$ invece il denominatore è ancora più complicato e non abbiamo dati a sufficienza per risolvere il sistema e verificare la correttezza dell'andamento.

Possiamo dunque ipotizzare che per ogni r si abbia

$$\langle \sigma_j^a \sigma_{j+r}^b \rangle = \alpha_r + \frac{\beta_r}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right), \quad (5.19)$$

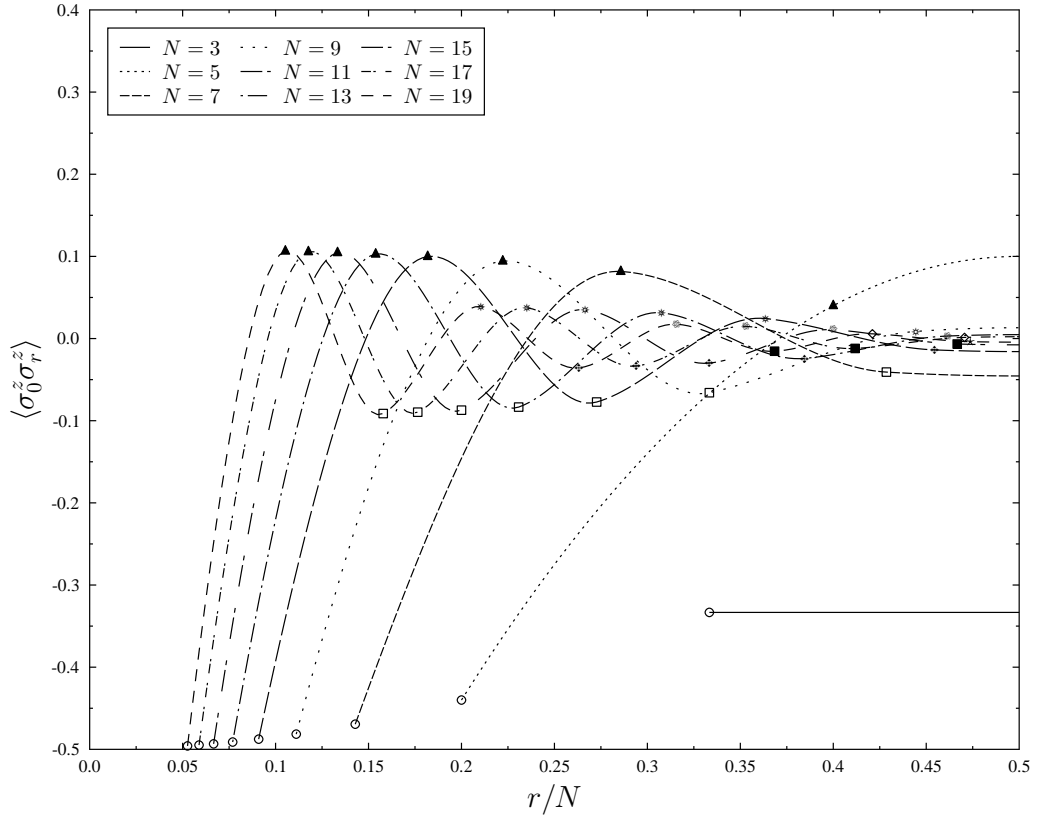


Figura 5.1: Funzioni di correlazione longitudinali per due spin distanti r siti in una catena di lunghezza N . A simboli uguali corrispondono r uguali.

per qualche α_r, β_r ; dove $(a, b) \equiv (z, z)$ o $(a, b) \equiv (+, -)$.

Osserviamo inoltre che la nostra formula (5.12) è in accordo con la congettura 5 di Razumov-Stroganov.

Nei grafici 5.1 e 5.2 mostriamo i valori delle funzioni di correlazione al variare delle dimensioni N della catena e della distanza r tra due siti. Abbiamo in aggiunta disegnato delle curve che collegano tali valori per ogni N fissato poiché aiutano a seguire l'andamento al variare di r ; inoltre, a simbolo uguale corrisponde r uguale.

Abbiamo realizzato i grafici in funzione del rapporto r/N in modo da visualizzare

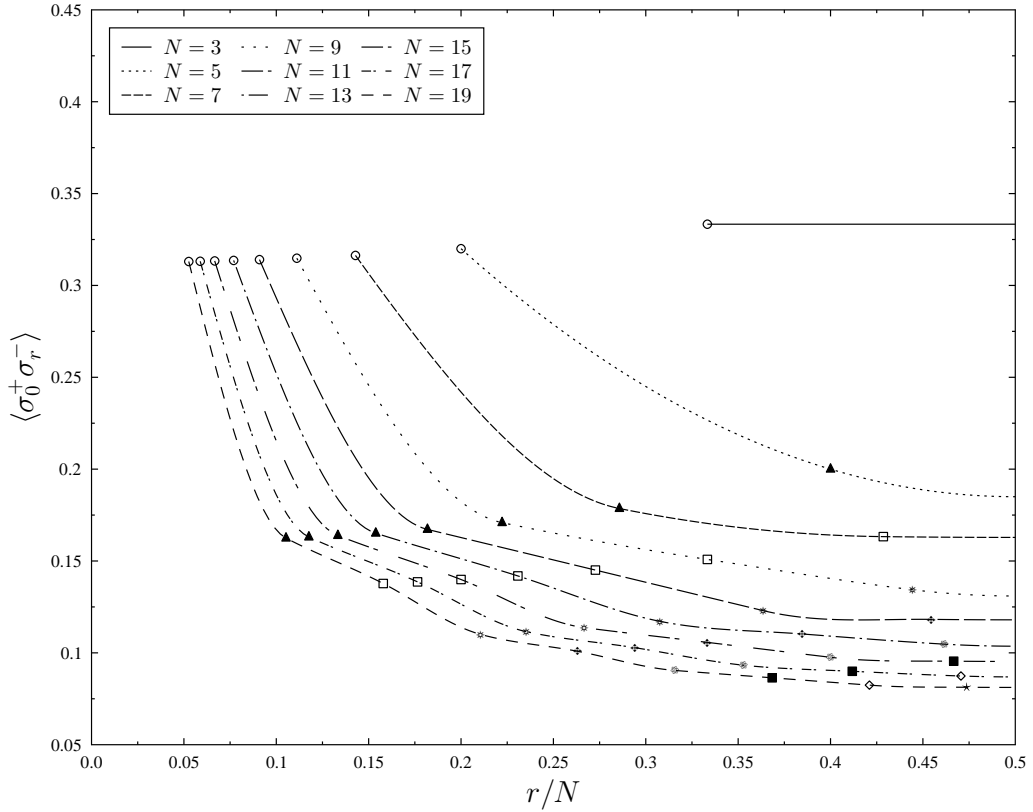


Figura 5.2: Funzioni di correlazione trasverse per due spin distanti r siti in una catena di lunghezza N . A simboli uguali corrispondono r uguali.

il comportamento sia in funzione della distanza tra due siti (per N fissato), sia in funzione del numero di siti N (per r fissato). Con questa scelta tutte le curve sono definite nello stesso intervallo $(0, 1)$. Inoltre, per le condizioni periodiche al contorno e l'invarianza traslazionale si ha una simmetria rispetto all'asse verticale passante per $\frac{r}{N} = \frac{1}{2}$. Per ogni j infatti, $\langle \vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_{j+r} \rangle = \langle \vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_{j-r} \rangle$, dove gli indici sono definiti modulo N . Dunque, se fissiamo l'origine degli indici nello spin j -esimo, per ogni N si ha $\langle \vec{\sigma}_0 \vec{\sigma}_r \rangle = \langle \vec{\sigma}_0 \vec{\sigma}_{(N-r)} \rangle$. Abbiamo perciò scelto di restringerci all'intervallo $\frac{r}{N} \in [0, \frac{1}{2}]$.

Per ogni N fissato, vediamo che le funzioni di correlazione tra due spin decrescono

velocemente, in modulo, al crescere della distanza tra siti. Fissato r invece $\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle$ e $\langle \sigma_0^+ \sigma_r^- \rangle$ rispettivamente crescono o decrescono, in modulo, all'aumentare della lunghezza della catena.

I grafici rispecchiano inoltre il carattere dell'hamiltoniana (2.15), anti-ferromagnetica lungo l'asse z e ferromagnetica lungo le direzioni trasverse. Spin separati da un numero pari di siti si dispongono preferenzialmente in configurazione antiparallela lungo l'asse z , in modo da minimizzare l'energia. Abbiamo quindi un valore positivo di $\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle$ per r pari e negativo per r dispari. Dal carattere ferromagnetico lungo le direzioni trasverse abbiamo invece che le funzioni $\langle \sigma_0^+ \sigma_r^- \rangle$ sono sempre positive.

5.4 Entanglement

Tramite le funzioni di correlazione abbiamo calcolato la concurrence e l'entanglement residuo. In particolare, dalle formule (5.2) e (5.3), abbiamo ottenuto che la concurrence dello stato di Razumov-Stroganov a $r \geq 2$ vicini è nulla, cioè che l'entanglement tra due spin è esclusivamente a corto raggio.

La figura 5.3 mostra i risultati dei nostri calcoli. La concurrence a primi vicini e lo one-tangle sono dati rispettivamente dalle formule (5.6), (5.5). Inoltre, poiché la concurrence a $r \geq 2$ vicini è nulla, abbiamo potuto ottenere l'espressione esatta per l'entanglement residuo (R) e l'entanglement ratio (r):

$$R = \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8N^2} \right) \sqrt{1 - \frac{10}{N^2} + \frac{9}{N^4} + \frac{3}{32} - \frac{11}{16N^2} - \frac{45}{32N^4}} \quad (5.20)$$

$$r = - \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{N^2 - 1} \right) \sqrt{1 - \frac{10}{N^2} + \frac{9}{N^4} + \frac{29}{32} + \frac{2}{N^2 - 1} - \frac{45}{32N^2}} \quad (5.21)$$

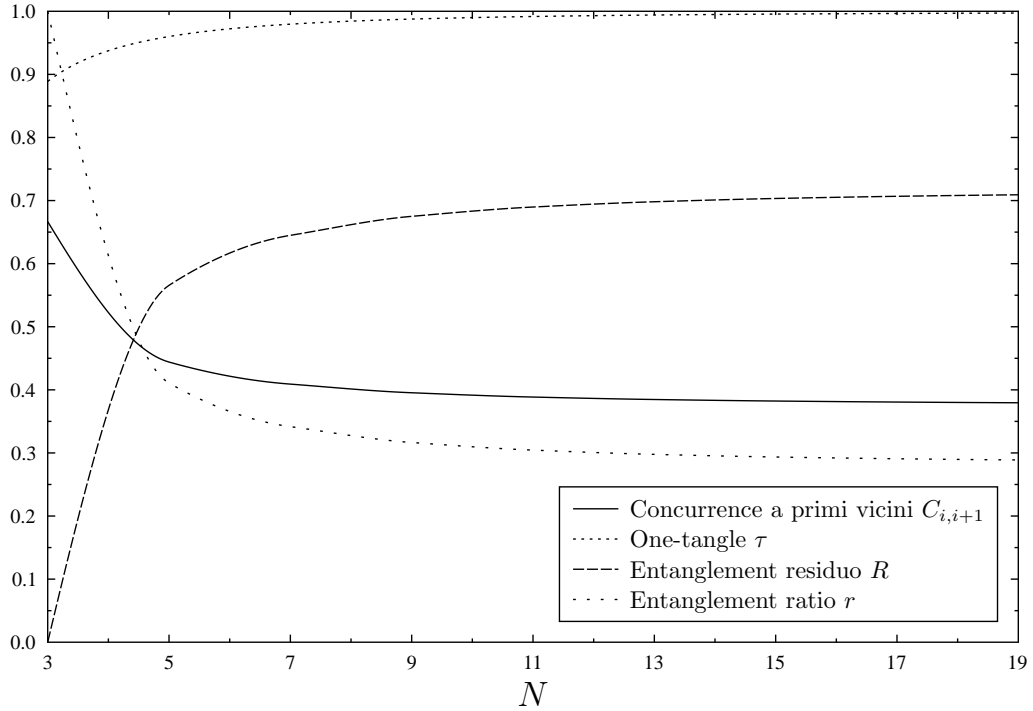


Figura 5.3: Concurrence a primi vicini, One-tangle, Entanglement Ratio ed Entanglement residuo in una catena di lunghezza N .

Nel caso $N = 3$ l'entanglement residuo è nullo. Ciò non stupisce in quanto lo stato di Razumov-Stroganov (2.18) per $N = 3$ è lo stato W_3 (3.24) che ha entanglement completamente bipartito. D'altro canto, per $N > 3$ si sviluppa rapidamente entanglement multipartito. Non possiamo però analizzare il modo in cui si distribuisce, poiché non esiste ancora un buon estimatore di entanglement multipartito.

Ogni spin è fortemente entangled col resto della catena in quanto lo one-tangle è molto vicino al valore massimo. La concurrence ha invece un valore massimo per $N = 3$ e decresce all'aumentare di N . Ne deduciamo, sulla base della proprietà di monogamia, che al crescere della lunghezza della catena l'entanglement si ripartisca tra i vari spin e di conseguenza l'entanglement bipartito a primi vicini diminuisce.

Sempre in figura 5.3 notiamo che tutti gli estimatori di entanglement raggiungono velocemente il valore asintotico. Ipotizziamo quindi che il contenuto di entanglement di un blocco di spin contigui rimanga pressoché inalterato all'aumentare del numero di siti. Il calcolo dell'entropia d'entanglement che mostriamo del prossimo paragrafo dà un'ulteriore conferma di questo comportamento.

5.5 Entropia di Von Neumann

Mostriamo adesso i risultati per l'entropia d'entanglement relativa ad alcune bipartizioni della catena di N spin. In figura 5.4 è stato riportato il valore, normalizzato ad uno, dell'entropia di Von Neumann $\tilde{S}_2(r, N)$ di un qualsiasi sottosistema di due spin, ossia quanto una generica coppia di spin è entangled con il resto del sistema.

Notiamo innanzi tutto che $\tilde{S}_2(r, N)$ ha un valore minimo nel caso in cui i due spin siano adiacenti, laddove la concurrence a primi vicini assume il valore massimo. Ciò può essere interpretato tenendo conto che tanto più due spin sono entangled tra di loro, tanto meno, per la monogamia dell'entanglement, possono essere entangled col resto del sistema. Viceversa, poiché la concurrence tra due spin non adiacenti è nulla, risulta maggiore l'entanglement con gli altri spin della catena.

Fissiamo adesso una bipartizione scegliendo un blocco di m spin adiacenti, con $m < N/2$, ed analizziamo l'entanglement tra le due parti. In figura 5.5 mostriamo l'entropia di Von Neumann $S_b(N, m)$ del blocco al variare della lunghezza della catena. Notiamo che, al crescere di m con N fissato, cresce l'entropia dato che aumentano i possibili tipi di entanglement tra i due blocchi.

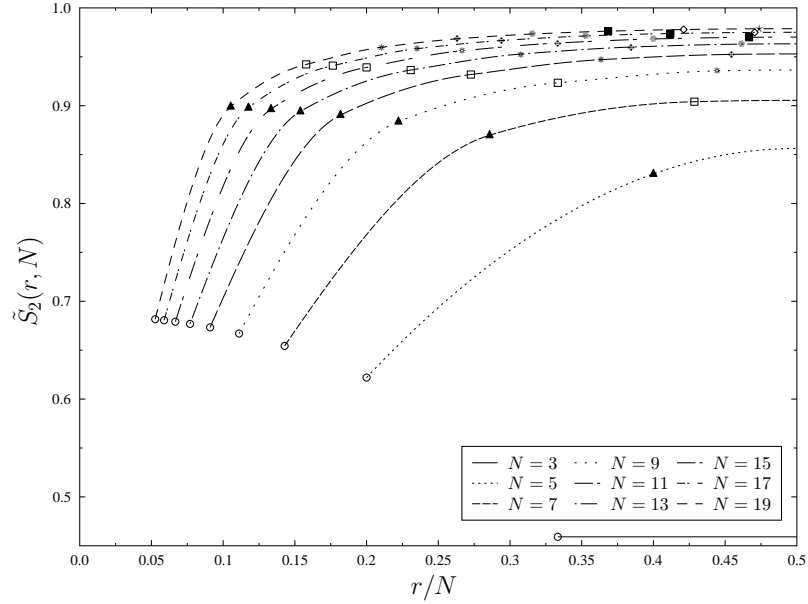


Figura 5.4: Entropia d’entanglement normalizzata ad 1 (3.11) tra due spin distanti r siti ed il resto del sistema, in una catena di lunghezza N . A simboli uguali corrispondono r uguali.

Analogamente, al crescere di N aumentano le possibilità di partizione della catena e quindi il numero di modi in cui spin appartenenti al blocco possono essere entangled con il resto del sistema. In figura 5.5 notiamo però che a ciò non corrisponde una variazione significativa dell’entanglement fra m spin contigui con il resto della catena. Questo può essere dovuto o ad una redistribuzione globale dell’entanglement oppure al fatto che il contributo delle nuove forme di entanglement è poco significativo per il blocco di spin.

Purtroppo, non possiamo analizzare in dettaglio il contenuto di entanglement tra gli spin che compongono il blocco a causa della mancanza di una misura adeguata. In generale infatti il blocco si trova in uno stato misto. Tuttavia, dai grafici 5.3 e 5.4

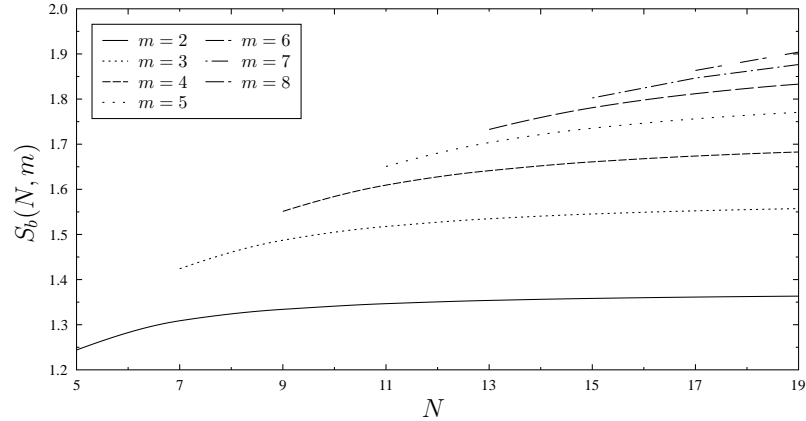


Figura 5.5: Entropia di entanglement non normalizzata di un blocco di m spin adiacenti con il resto della catena, al variare del numero di siti N .

notiamo che il sistema per N sufficientemente grande non viene significativamente influenzato dall'aumento della lunghezza della catena. Possiamo dunque ipotizzare che tra i due meccanismi di cui sopra, quello rilevante sia il secondo: il contenuto di entanglement di un blocco di m spin adiacenti non cambia considerevolmente al variare del numero di siti della catena.

Avendo calcolato l'entropia d'entanglement, è naturale confrontarla con la previsione teorica ottenuta nel contesto delle teorie di campo conforme da Cardy e Calabrese [48], secondo la quale

$$S_b(N, m) = \frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{N}{\pi} \sin \frac{\pi m}{N} \right) + c' + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right), \quad (5.22)$$

dove c' è un parametro dipendente dal modello. Utilizzando i nostri dati per $N \geq 5$ (i valori per $N = 3$ risentono pesantemente delle correzioni di lunghezza finita, come si vede dalla figura 5.6) abbiamo fatto un *fit* a un parametro (c') con i primi due termini della (5.22) ed abbiamo ottenuto il valore $c' = (1.0495 \pm 6 \cdot 10^{-4})$. In figura 5.6

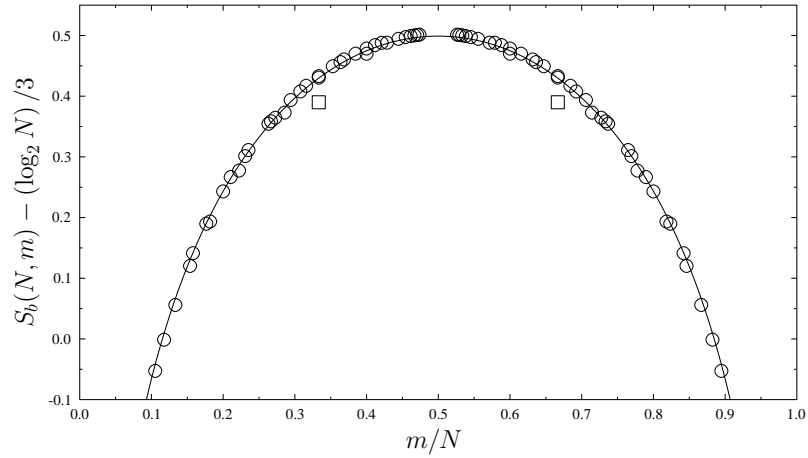


Figura 5.6: Confronto tra i nostri dati - simboli - e l'espressione (5.22) - linea - con $c' = 1.0495$. I dati visibilmente fuori dalla curva (quadrato) corrispondono alla catena con $N = 3$.

si osserva chiaramente che i nostri risultati sono in ottimo accordo con l'andamento (5.22).

Mentre eravamo in fase di stesura finale di questa tesi è uscito un lavoro indipendente di Nienhuis, Campostrini, Calabrese [49]. In questo lavoro gli autori calcolano numericamente l'entropia di entanglement per la catena di Razumov-Stroganov. I loro dati sono in totale accordo con i nostri. Nel confrontarsi con la formula (5.22) utilizzano il valore $c' = 1.054$ (a meno di un fattore $\log 2$ dovuto alla diversa definizione dell'entropia), ottenuto tramite DMRG (*Density Matrix Renormalization Group*); La lieve differenza con il valore estrapolato dai nostri dati è dovuta al fatto che questo risente in maniera sistematica delle correzioni di lunghezza finita della catena.

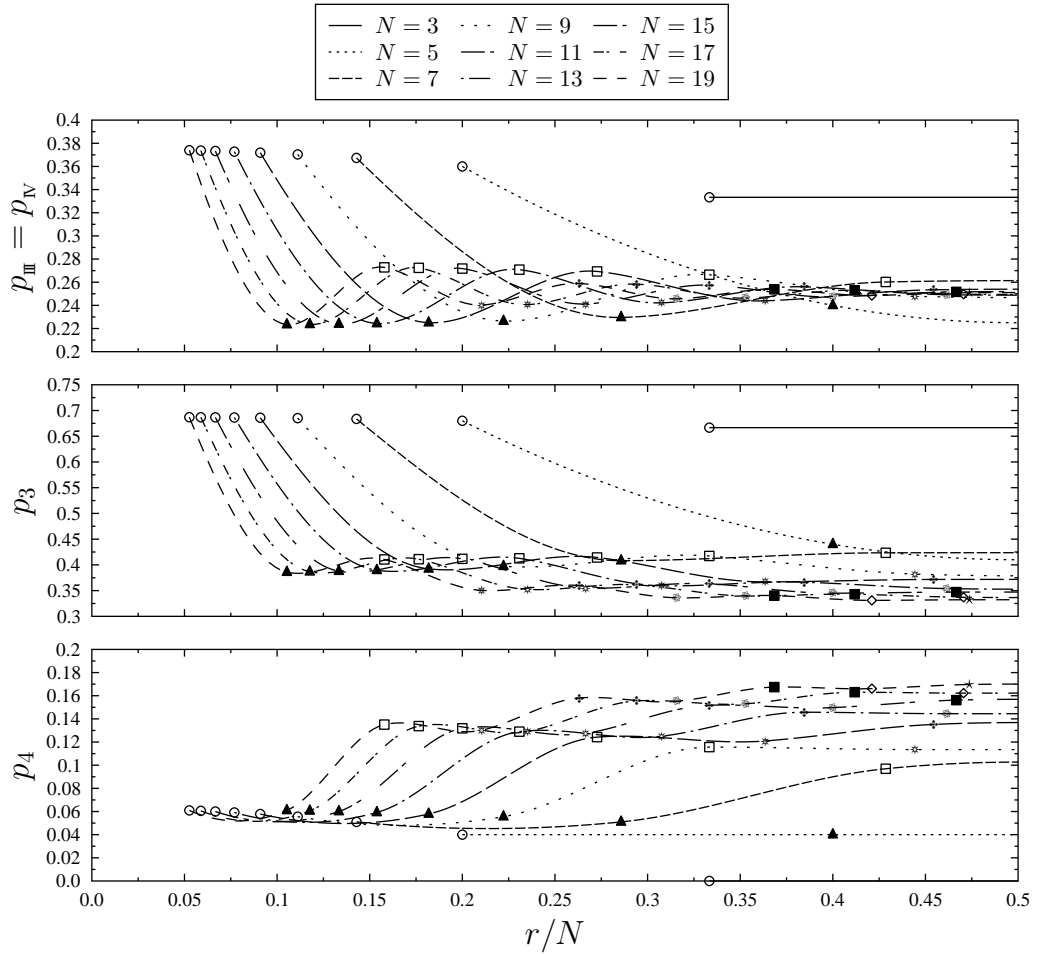


Figura 5.7: Probabilità di trovare due spin a distanza r in configurazione antiparallela per una catena di lunghezza N . A simboli uguali corrispondono r uguali.

5.6 Configurazioni degli spin

In questa sezione analizziamo le probabilità di trovare due spin in alcuni stati di particolare rilevanza nell'interpretazione delle proprietà di entanglement, secondo le notazioni introdotte nel paragrafo 3.5.1. I dati sono stati ottenuti dalle funzioni di correlazione tramite le equazioni (3.39). Inoltre, dalle simmetrie dell'hamiltoniana XXZ di Razumov-Stroganov, si ha che $p_1 = p_2$ e $p_{\text{III}} = p_{\text{IV}}$.

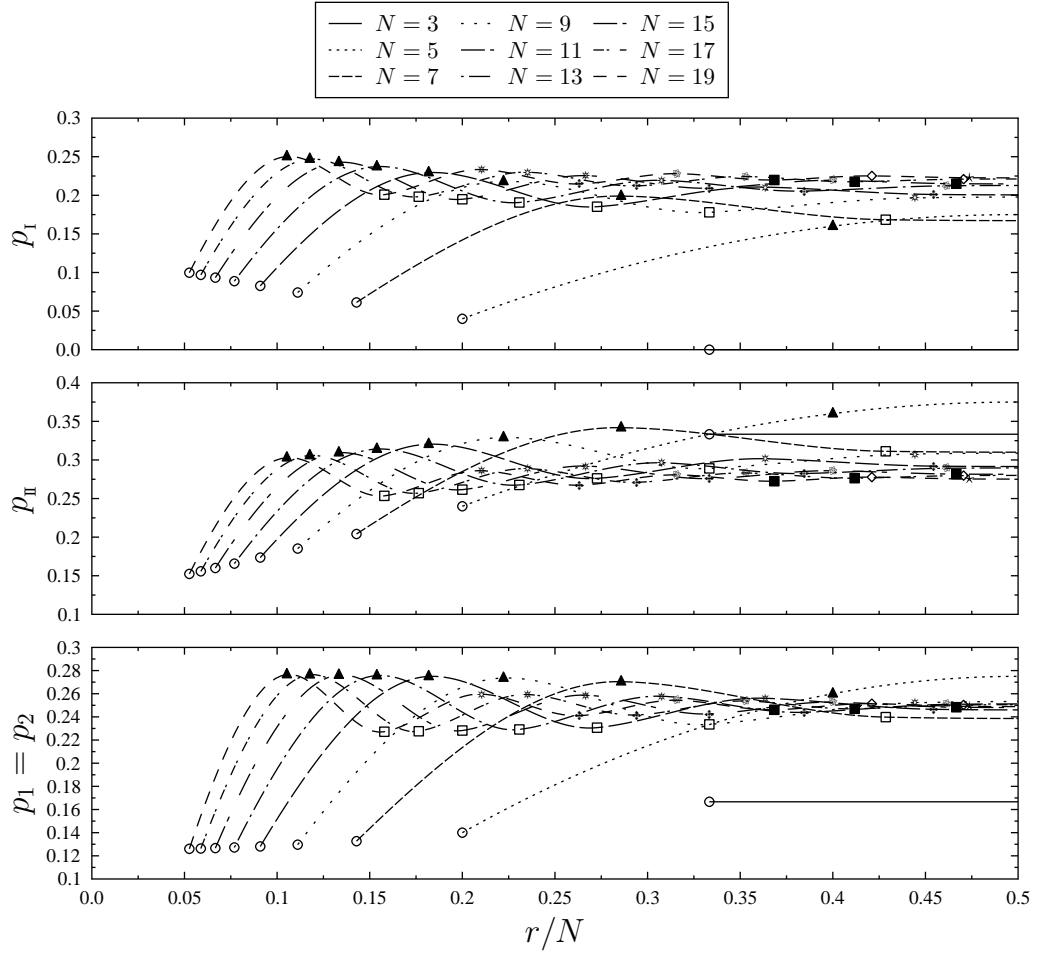


Figura 5.8: Probabilità di trovare due spin a distanza r in configurazione parallela per una catena di lunghezza N . A simboli uguali corrispondono r uguali.

I grafici di figura 5.7 mostrano che abbiamo una probabilità molto elevata di trovare due spin adiacenti nella stato di tripletto $|e_3\rangle$, mentre la probabilità che si trovino nello stato di singoletto $|e_4\rangle$ è molto bassa. Inoltre, anche la probabilità di trovare due spin adiacenti negli stati separabili antiparalleli, $p_{\text{III}} = p_{\text{IV}}$, è piuttosto elevata. È naturale ipotizzare che ciò sia una conseguenza dell'alta probabilità che due spin adiacenti siano nello stato $|e_3\rangle$.

I grafici di figura 5.8 mostrano invece che, a primi vicini, la probabilità di tro-

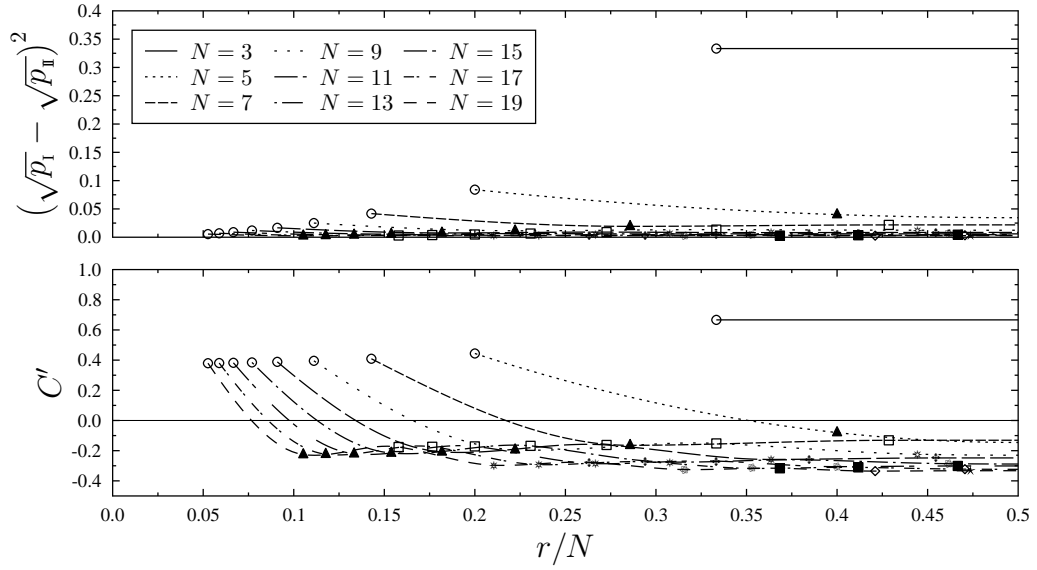


Figura 5.9: Grafico in alto: quantità $(\sqrt{p_I} - \sqrt{p_{II}})^2$ per due spin a distanza r in una catena di lunghezza N . Grafico in basso: Concurrence $C' = 2 \max\{p_3, p_4\} + (\sqrt{p_I} - \sqrt{p_{II}})^2 - 1$ fra due spin a distanza r in una catena di lunghezza N . La linea $C' = 0$ visualizza i punti in cui C' si annulla. A simboli uguali corrispondono r uguali.

vare due spin in configurazione parallela è molto bassa. Nello stato di Razumov-Strogonov, infatti, gli stati che hanno due spin adiacenti in configurazione antiparallela sono favoriti dal termine positivo $\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$ nell'hamiltoniana (2.15). Difatti, la componente con il peso maggiore è quella di tipo Néel $|01010 \dots 010\rangle$, mentre quella con il peso minore è la “ferromagnetica” $|00 \dots 011 \dots 1\rangle$. Notiamo inoltre, che la probabilità p_I di trovare due spin su è leggermente più bassa della probabilità p_{II} di trovare due spin giù. Questo è evidentemente dovuto alla presenza, nello stato di Razumov-Strogonov, di un numero maggiore di spin giù. Le probabilità p_I e p_{II} sono le sole ad essere influenzate da una magnetizzazione non nulla, come vediamo da (3.39). Poiché la magnetizzazione dello stato di Razumov-Strogonov (5.4) de-

crece, all'aumentare delle dimensioni della catena, ed arriva velocemente al valore asintotico, si ha che anche la differenza tra p_I e p_{II} assume velocemente un valore costante.

Dai grafici 5.7 e 5.8 vediamo che, aumentando la distanza tra due spin, tutte le probabilità raggiungono rapidamente valori prossimi ad $1/4$. Pertanto, per spin non adiacenti tutte le configurazioni hanno pressoché la stessa probabilità, nonostante p_3 e p_{II} rimangano leggermente maggiori di p_4 e p_I , rispettivamente.

È comunque interessante che p_3 sia sempre maggiore delle altre probabilità. Infatti dal carattere ferromagnetico dello stato di Razumov-Stroganov ci potevamo aspettare che spin separati da un numero dispari di siti si disponessero preferenzialmente in configurazione parallela.

L'andamento delle curve in 5.7 e 5.8, infine, è una conseguenza dell'andamento delle funzioni di correlazione riportate in 5.1 e 5.2. In particolare $p_1 = p_2$ e $p_{III} = p_{IV}$, che dipendono soltanto dalle funzioni di correlazione trasverse (3.39), oscillano intorno al valore $1/4$ nello stesso modo in cui le funzioni $\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle$ oscillano intorno a zero, a meno del segno. Questo andamento è invece dilatato in p_I e p_{II} a causa della dipendenza dalla magnetizzazione. Le probabilità p_3 e p_4 dipendono anche dalle funzioni di correlazione trasverse ed hanno un andamento più complicato, dove le oscillazioni di G^{zz} sono lievemente smorzate da G^{+-} .

Per gli autostati dell'hamiltoniana (2.15) la concurrence è data da

$$C = \max \left\{ 0, 2 \max \{p_3, p_4\} + (\sqrt{p_I} - \sqrt{p_{II}})^2 - 1 \right\} \quad (5.23)$$

Dai grafici 5.7, 5.8 e 5.9, notiamo che la concurrence è causata da un'elevata probabilità di trovare gli spin nella configurazione di tripletto $|e_3\rangle$, mentre $(\sqrt{P_I} - \sqrt{P_{II}})^2$ non influisce molto. Dal grafico in basso di figura 5.9 vediamo chiaramente che abbiamo concurrence diversa da zero soltanto a primi vicini.

5.7 Considerazioni conclusive

Abbiamo mostrato che l'entanglement dello stato di Razumov-Stroganov si redistribuisce tra gli spin della catena secondo un meccanismo che coinvolge simultaneamente entanglement bipartito e multipartito. In questo senso il punto a $\Delta = -\frac{1}{2}$ non esibisce né le caratteristiche dei punti critici (prevalente multipartito), né quelle dei punti fattorizzabili (bipartito esclusivo). In particolare, abbiamo trovato che lo stato di Razumov-Stroganov non è separabile, neppure quando si considerino generiche bipartizioni della catena. Questo significa che l'andamento lineare dell'energia in funzione del numero dei siti non deriva dalla fattorizzazione in stati di singolo spin, come accade nel caso osservato da Kurmann *et al.*

Abbiamo trovato che il modello a $T = 0$ non presenta concurrence a lungo raggio, ma è comunque caratterizzato da una distribuzione dell'entanglement fortemente non locale. Infatti l'entropia di Von Neumann fra un blocco di m spin ed il resto del sistema, cresce all'aumentare di m .

I risultati di questa tesi forniscono un punto di partenza per un'ulteriore analisi dello stato di Razumov-Stroganov ed in particolare delle sue proprietà di entanglement. Riteniamo infatti che tali proprietà possano fornire indicazioni al fine di

individuare gradi di libertà rispetto ai quali la struttura dello stato di Razumov-Stroganov si possa semplificare. A tal fine potrebbe essere utile lo studio dell'entanglement tra i fermioni dello stato fondamentale del modello supersimmetrico, o tra i vertici dei grafici del modello $O(1)$.

Concludiamo sottolineando che i nostri sono i primi risultati esatti per misure globali di entanglement in un modello interagente. Sono stati ottenuti in virtù della conoscenza esplicita dello stato fondamentale, peculiare del modello di Razumov-Stroganov. Siamo certi che da tale conoscenza possano scaturire ulteriori analisi e approfondimenti non altrimenti possibili.

APPENDICE A

Algoritmi per i calcoli numerici

In quest'appendice descriviamo in dettaglio gli algoritmi con cui abbiamo calcolato lo stato fondamentale dell'hamiltoniana 2.15 per N dispari, le funzioni di correlazione $\langle \sigma_0^+ \sigma_r^- \rangle$ e la matrice densità ridotta di un qualsiasi sottoinsieme di spin della catena.

A.1 Calcolo dello stato fondamentale

- 1: Fissato $N = 2n + 1$ si calcolano tutti i possibili numeri binari formati da $n + 1$ cifre zero (spin giù) ed n cifre uno (spin su).
- 2: Si raggruppano i numeri nelle classi di equivalenza data dalla invarianza per traslazioni. In ogni classe troviamo l'elemento a cui corrisponde il numero binario più piccolo; con tali elementi, che chiamiamo $|\alpha_i\rangle$, $i = 1, \dots, \mathcal{C}_n$, si costruisce la base $\overline{\mathcal{B}}_N$.
- 3: Inseriamo gli elementi di $\overline{\mathcal{B}}_N$ in un albero ordinato \mathcal{A} dove in ogni nodo, oltre alla chiave data dal numero α_i , inseriamo anche l'indice i .

- 4: Inizializziamo a zero una matrice H , di dimensione $\mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$ e con elementi interi.
- 5: Per ogni elemento $|\alpha_i\rangle \in \overline{\mathcal{B}}_N^-$:
- 6: Facciamo agire l'hamiltoniana di Razumov-Stroganov \mathcal{H} su $|\alpha_i\rangle$. In generale otteniamo $\mathcal{H}|\alpha_i\rangle = \sum_j h_{ij}|\beta_j\rangle$ dove h_{ij} sono numeri semi-interi ed i vari $|\beta_j\rangle$ sono stati con $n + 1$ zero e n uno, non necessariamente contenuti in $\overline{\mathcal{B}}_N^-$.
- 7: Per ogni $|\beta_j\rangle$:
- 8: Calcoliamo il minimo α tra tutte le possibili permutazioni cicliche delle N cifre di β_j .
- 9: Poiché $\alpha \in \overline{\mathcal{B}}_N^-$ troviamo l'indice k eseguendo una ricerca nell'albero \mathcal{A}
- 10: Aggiungiamo $2h_{ij}$ ad H_{ik} .
- 11: Fine ciclo
- 12: Fine ciclo
- 13: Calcoliamo adesso lo stato di Razumov-Stroganov trovando l'autovettore di H corrispondente all'autovalore $-3N$. Abbiamo infatti posto $H = 2\mathcal{H}$ in modo che H sia una matrice di numeri interi. Usiamo dunque la libreria *IML*¹ per il calcolo di $K = \text{Ker}(H + 3NI)$, dove I è la matrice identità $\mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_n$. Verifichiamo che K è composto da un unico vettore; questo è lo stato di Razumov-Stroganov.

A.2 Calcolo delle funzioni di correlazione traverse

- 1: Leggiamo lo stato di Razumov-Stroganov della catena con N siti (5.7).

¹*Integer Matrix Library*, <http://www.cs.uwaterloo.ca/~z4chen/iml.html>

- 2: Costruiamo la base $\overline{\mathcal{B}}_N$ e l'albero \mathcal{A} eseguendo i punti 1-3 dell'algoritmo precedente. In ogni nodo di \mathcal{A} inseriamo, oltre alla chiave $|\alpha\rangle \in \overline{\mathcal{B}}_N$, anche il coefficiente Ψ_α dello stato di Razumov-Stroganov.
- 3: Poniamo $g = 0$.
- 4: Per ogni nodo \mathcal{K} di \mathcal{A} :
 - 5: Estraiamo dal nodo \mathcal{K} lo stato $|\alpha\rangle \in \overline{\mathcal{B}}_N$ ed il coefficiente dello stato di Razumov-Stroganov Ψ_α .
 - 6: Per ogni $1 \leq j \leq N$:
 - 7: Se lo stato $|\alpha\rangle$ ha uno spin giù (zero) in posizione j ed uno spin su (uno) in posizione $(j+r) \bmod N$:
 - 8: Sia $|\beta\rangle$ lo stato $|\alpha\rangle$ con gli spin in posizione j e $(j+r) \bmod N$ invertiti.
 - 9: Calcoliamo il minimo α' tra tutti le possibili permutazioni cicliche delle cifre di β .
 - 10: Poiché $\alpha' \in \overline{\mathcal{B}}_N$ cerchiamo il nodo in \mathcal{A} relativo alla chiave α' ed estraiamo $\Psi_{\alpha'}$.
 - 11: Aggiungiamo a g il prodotto $\Psi_\alpha * \Psi_{\alpha'}$.
 - 12: Fine Se
 - 13: Fine ciclo
 - 14: Fine ciclo
 - 15: Si calcola la norma \mathcal{N} di $|\Psi\rangle$. Abbiamo così $g_{0r}^{+-} = \frac{g}{\mathcal{N}^2}$. Semplifichiamo il radicale e mostriamo il risultato.

A.3 Calcolo della matrice densità ridotta

Calcoliamo adesso la matrice densità ridotta relativa agli spin in posizione $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, con $m < N$. Sia $\#(\alpha)$ la funzione che associa ad ogni numero binario α il valore decimale del suo complemento ad uno.

- 1: Inizializziamo a zero la matrice ρ , di dimensione $2^m \times 2^m$ e con elementi interi.
- 2: Leggiamo lo stato di Razumov-Stroganov $|\Psi_N\rangle$ e costruiamo un vettore \mathcal{V} dato dall'insieme delle coppie (Ψ_α, α) , dove adesso α è un elemento della base completa \mathcal{B}_N^- ; pertanto $\Psi_\alpha = \Psi_\beta$ se α è una permutazione ciclica di β .
- 3: Per ogni coppia $(\Psi_\alpha, \alpha) \in \mathcal{V}$:
- 4: Per ogni coppia $(\Psi_{\alpha'}, \alpha') \in \mathcal{V}$:
- 5: Separiamo α in due numeri η e ξ . Il numero binario η è formato da m cifre: la cifra in posizione i è uguale alla cifra in posizione k_i di α . In ξ stanno invece le $N - m$ cifre rimanenti.
- 6: Separiamo allo stesso modo α' in due numeri η' e ξ' .
- 7: Se $\xi = \xi'$:
- 8: Aggiungiamo a $\rho_{\#(\eta)+1, \#(\eta')+1}$ il prodotto $\Psi_\alpha * \Psi_{\alpha'}$.
- 9: Fine Se
- 10: Fine ciclo
- 11: Fine ciclo

APPENDICE B

Funzioni di correlazione dello stato di Razumov-Stroganov

Mostriamo le funzioni di correlazione indipendenti e non nulle dello stato di Razumov-Stroganov per $3 \leq N \leq 19$. Per le condizioni al contorno periodiche e l'invarianza per traslazioni si ha $\langle \vec{\sigma}_0 \vec{\sigma}_r \rangle = \langle \vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_{r+j} \rangle$, dove gli indici sono definiti modulo N . Inoltre, $\langle \vec{\sigma}_0 \vec{\sigma}_r \rangle \Big|_N = \langle \vec{\sigma}_0 \vec{\sigma}_{N-r} \rangle \Big|_N$ per ogni N fissato.

Funzioni di correlazione per $N = 3$:

$$\langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle = -\frac{1}{3}, \quad \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle = \frac{1}{3}.$$

Funzioni di correlazione per $N = 5$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle &= -\frac{11}{25}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle &= \frac{8}{25}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_2^z \rangle &= \frac{1}{25}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_2^- \rangle &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Funzioni di correlazione per $N = 7$:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle &= -\frac{23}{49}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle &= \frac{31}{98}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_2^z \rangle &= \frac{4}{49}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_2^- \rangle &= \frac{5}{28}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_3^z \rangle &= -\frac{2}{49}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_3^- \rangle &= \frac{8}{49}.\end{aligned}$$

Funzioni di correlazione per $N = 9$:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle &= -\frac{13}{27}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle &= \frac{17}{54}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_2^z \rangle &= \frac{28}{297}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_2^- \rangle &= \frac{203}{1188}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_3^z \rangle &= -\frac{646}{9801}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_3^- \rangle &= \frac{2957}{19602}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_4^z \rangle &= \frac{85}{9801}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_4^- \rangle &= \frac{5267}{39204}.\end{aligned}$$

Funzioni di correlazione per $N = 11$:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle &= -\frac{59}{121}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle &= \frac{38}{121}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_2^z \rangle &= \frac{157}{1573}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_2^- \rangle &= \frac{263}{1573}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_3^z \rangle &= -\frac{191159}{2474329}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_3^- \rangle &= \frac{358934}{2474329}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_4^z \rangle &= \frac{60205}{2474329}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_4^- \rangle &= \frac{304247}{2474329}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_5^z \rangle &= -\frac{34211}{2474329}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_5^- \rangle &= \frac{292535}{2474329}.\end{aligned}$$

Funzioni di correlazione per $N = 13$:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle &= -\frac{83}{169}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle &= \frac{53}{169}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_2^z \rangle &= \frac{191}{1859}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_2^- \rangle &= \frac{307}{1859}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_3^z \rangle &= -\frac{288287}{3455881}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_3^- \rangle &= \frac{980587}{6911762},\end{aligned}$$

APPENDICE B: FUNZIONI DI CORRELAZIONE DELLO STATO DI
RAZUMOV-STROGANOV

$$\begin{aligned}\langle\sigma_0^z\sigma_4^z\rangle &= \frac{1840490}{58749977}, & \langle\sigma_0^+\sigma_4^-\rangle &= \frac{13764761}{117499954}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_5^z\rangle &= -\frac{1418374}{58749977}, & \langle\sigma_0^+\sigma_5^-\rangle &= \frac{440569721}{3994998436}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_6^z\rangle &= \frac{180755}{58749977}, & \langle\sigma_0^+\sigma_6^-\rangle &= \frac{32187425}{307307572}.\end{aligned}$$

Funzioni di correlazione per N = 15:

$$\begin{aligned}\langle\sigma_0^z\sigma_1^z\rangle &= -\frac{37}{75}, & \langle\sigma_0^+\sigma_1^-\rangle &= \frac{47}{150}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_2^z\rangle &= \frac{1732}{16575}, & \langle\sigma_0^+\sigma_2^-\rangle &= \frac{2173}{13260}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_3^z\rangle &= -\frac{106424}{1221025}, & \langle\sigma_0^+\sigma_3^-\rangle &= \frac{683381}{4884100}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_4^z\rangle &= \frac{166065713}{4732692900}, & \langle\sigma_0^+\sigma_4^-\rangle &= \frac{2153099821}{18930771600}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_5^z\rangle &= -\frac{45641911103}{1528659806700}, & \langle\sigma_0^+\sigma_5^-\rangle &= \frac{80794980229}{764329903350}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_6^z\rangle &= \frac{5472848587}{509553268900}, & \langle\sigma_0^+\sigma_6^-\rangle &= \frac{15300585227}{156785621200}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_7^z\rangle &= -\frac{2030232889}{305731961340}, & \langle\sigma_0^+\sigma_7^-\rangle &= \frac{36479665331}{382164951675}.\end{aligned}$$

Funzioni di correlazione per N = 17:

$$\begin{aligned}\langle\sigma_0^z\sigma_1^z\rangle &= -\frac{143}{289}, & \langle\sigma_0^+\sigma_1^-\rangle &= \frac{181}{578}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_2^z\rangle &= \frac{580}{5491}, & \langle\sigma_0^+\sigma_2^-\rangle &= \frac{3581}{21964}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_3^z\rangle &= -\frac{2701760}{30151081}, & \langle\sigma_0^+\sigma_3^-\rangle &= \frac{16720001}{120604324}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_4^z\rangle &= \frac{85609579}{2291482156}, & \langle\sigma_0^+\sigma_4^-\rangle &= \frac{1022449103}{9165928624}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_5^z\rangle &= -\frac{420209498453}{12582528518596}, & \langle\sigma_0^+\sigma_5^-\rangle &= \frac{1293618697301}{12582528518596}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_6^z\rangle &= \frac{4312120963109}{289398155927708}, & \langle\sigma_0^+\sigma_6^-\rangle &= \frac{107963235443287}{1157592623710832}, \\ \langle\sigma_0^z\sigma_7^z\rangle &= -\frac{80154251666063}{6656157586337284}, & \langle\sigma_0^+\sigma_7^-\rangle &= \frac{149709686219576}{1664039396584321},\end{aligned}$$

APPENDICE B: FUNZIONI DI CORRELAZIONE DELLO STATO DI
RAZUMOV-STROGANOV

$$\langle \sigma_0^z \sigma_8^z \rangle = \frac{2295761733931}{1664039396584321}, \quad \langle \sigma_0^+ \sigma_8^- \rangle = \frac{2327005562378369}{26624630345349136}.$$

Funzioni di correlazione per $N = 19$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0^z \sigma_1^z \rangle &= -\frac{179}{361}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_1^- \rangle &= \frac{113}{361}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_2^z \rangle &= \frac{653}{6137}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_2^- \rangle &= \frac{997}{6137}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_3^z \rangle &= -\frac{3438599}{37662769}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_3^- \rangle &= \frac{10375663}{75325538}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_4^z \rangle &= \frac{572016190}{14726142679}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_4^- \rangle &= \frac{3241459129}{29452285358}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_5^z \rangle &= -\frac{74322166239902}{2078609765283529}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_5^- \rangle &= \frac{838524939087767}{8314439061134116}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_6^z \rangle &= \frac{833236453321004}{47808024601521167}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_6^- \rangle &= \frac{5085897919191151}{56244734825319020}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_7^z \rangle &= -\frac{84714466336475668}{5497922829174934205}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_7^- \rangle &= \frac{9501975170026591889}{109958456583498684100}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_8^z \rangle &= \frac{158472475301843629}{27489614145874671025}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_8^- \rangle &= \frac{9063877935730237997}{109958456583498684100}, \\ \langle \sigma_0^z \sigma_9^z \rangle &= -\frac{104913236260475639}{27489614145874671025}, & \langle \sigma_0^+ \sigma_9^- \rangle &= \frac{2233981175847980954}{27489614145874671025}. \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandao, and M. B. Plenio, “Effective spin systems in coupled microcavities”, *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 16, p. 160501, 2007.
- [2] G. Burkard, H. A. Engel, and D. Loss, “Spintronics and quantum dots for quantum computing and quantum communication”, *Fortschritte der Physik*, vol. 48, no. 9-11, pp. 965–986, 2000.
- [3] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov, “Spin chains and combinatorics”, *J.Phys.A*, vol. 34, p. 3185, 2001, arXiv:cond-mat/0012141.
- [4] J. Kurmann, H. Thomas, and G. Müller, “Antiferromagnetic long-range order in the anisotropic quantum spin chain”, *Physica A*, vol. 112, no. 1-2, pp. 235–255, 1982.
- [5] C. N. Yang and C. P. Yang, “Ground-state energy of a Heisenberg-Ising lattice”, *Physical Review*, vol. 147, no. 1, pp. 303–306, 1966.
- [6] B. Sutherland, *Beautiful Models: 70 Years Of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*. World Scientific, 2004.

- [7] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge, New York, 1993.
- [8] D. M. Bressoud, *Proofs and confirmations: the story of the alternating sign matrix conjecture*. Cambridge University Press, 1999.
- [9] D. Bressoud and J. Propp, “How the alternating sign matrix conjecture was solved”, *Notices-American Mathematical Society*, vol. 46, pp. 637–646, 1999.
- [10] D. Zeilberger, “Proof of the alternating sign matrix conjecture”, *Electron. J. Combin.*, vol. 3, no. 2, 1996.
- [11] G. Kuperberg, “Another proof of the alternating sign matrix conjecture”, *Math. Res. Notes*, vol. 139, 1996.
- [12] E. H. Lieb, “Residual entropy of square ice”, *Physical Review*, vol. 162, no. 1, pp. 162–172, 1967.
- [13] B. Sutherland, “Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals”, *Physical Review Letters*, vol. 19, no. 3, pp. 103–104, 1967.
- [14] R. J. Baxter, “One-dimensional anisotropic Heisenberg chain”, *Physical Review Letters*, vol. 26, no. 14, pp. 834–834, 1971.
- [15] R. Stanley, “Catalan addendum”. New problems (and solutions) related to Catalan numbers, continually updated and available online at <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/>, May, 2005.

- [16] Y. Stroganov, “The importance of being odd”, *J.Phys.A*, vol. 34, p. 179, 2001, arXiv:cond-mat/0012035.
- [17] M. T. Batchelor, J. de Gier, and B. Nienhuis, “The quantum symmetric XXZ chain at $\Delta = -1/2$, alternating sign matrices and plane partitions”, *J.PHYS.A*, vol. 34, pp. –265, 2001, arXiv:cond-mat/0101385.
- [18] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov, “Spin chains and combinatorics: twisted boundary conditions”, *J.Phys.A*, vol. 34, p. 5335, 2001, arXiv:cond-mat/0102247.
- [19] D. Kalman, R. Mena, and S. Shahriari, “Variations on an irrational theme—geometry, dynamics, algebra”, *Mathematics Magazine*, vol. 70, no. 2, 1997.
- [20] L. Amico, F. Baroni, A. Fubini, D. Patanè, V. Tognetti, and P. Verrucchi, “Divergence of the entanglement range in low-dimensional quantum systems”, *Physical Review A*, vol. 74, no. 2, p. 22322, 2006.
- [21] L. Amico, A. Osterloh, F. Plastina, R. Fazio, and G. Massimo Palma, “Dynamics of entanglement in one-dimensional spin systems”, *Physical Review A*, vol. 69, no. 2, p. 22304, 2004.
- [22] J. Preskill, *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*. California Institute of Technology, 1998.
- [23] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.

- [24] M. Horodecki, “Entanglement measures”, *Quantum Information and Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 3–26, 2001.
- [25] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, “Mixed-state entanglement and quantum error correction”, *Physical Review A*, vol. 54, no. 5, pp. 3824–3851, 1996.
- [26] W. K. Wootters, “Entanglement of formation and concurrence”, *Quantum Information and Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 27–44, 2001.
- [27] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight, “Quantifying entanglement”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 2275–2279, Mar 1997.
- [28] V. Vedral and M. B. Plenio, “Entanglement measures and purification procedures”, *Physical Review A*, vol. 57, p. 1619, 1998, arXiv:quant-ph/9707035.
- [29] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, “Distributed entanglement”, *Physical Review A*, vol. 61, no. 5, p. 52306, 2000.
- [30] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”, *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, pp. 2245–2248, 1998.
- [31] A. Miyake, “Classification of multipartite entangled states by multidimensional determinants”, *Physical Review A*, vol. 67, no. 1, p. 12108, 2003.
- [32] D. M. Greenberger, M. Horne, and A. Zeilinger, “Bell’s theorem, quantum theory, and conceptions of the universe”, *edited by M. Kafatos (Kluwer, Dordrecht, 1989)*, p. 69.

- [33] N. Gisin and H. Bechmann-Pasquinucci, “Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for n qubits”, *Physics Letters A*, vol. 246, p. 1, 1998, arXiv:quant-ph/9804045.
- [34] A. Sugita, “Borromean entanglement revisited”, 2007, arXiv:0704.1712.
- [35] A. Fubini, T. Roscilde, V. Tognetti, M. Tusa, and P. Verrucchi, “Reading entanglement in terms of spin configurations in quantum magnets”, *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 38, no. 3, pp. 563–570, 2006.
- [36] G. Veneziano and J. Wosiek, “A supersymmetric matrix model: III. hidden susy in statistical systems”, *JHEP*, vol. 0611, p. 030, 2006, arXiv:hep-th/0609210.
- [37] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb, “Relations between the “percolation” and “coloring” problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the “percolation” problem”, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, vol. 322, pp. 251–280, 1971.
- [38] J. de Gier, “Loops, matchings and alternating-sign matrices”, *Discr.Math.*, vol. 298, p. 365, 2005, arXiv:math/0211285v2.
- [39] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov, “Combinatorial nature of ground state vector of $O(1)$ loop model”, *Teor.Mat.Fiz.*, vol. 138, p. 395, 2004, arXiv:math/0104216v2.

- [40] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov, “O(1) loop model with different boundary conditions and symmetry classes of alternating-sign matrices”, *Teor. Mat. Fiz.*, vol. 142, p. 284, 2005, arXiv:cond-mat/0108103v1.
- [41] P. P. Martin, “Temperley-Lieb algebras and the long distance properties of statistical mechanical models”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 23, no. 1, pp. 7–30, 1990.
- [42] P. Fendley, K. Schoutens, and J. de Boer, “Lattice models with $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry”, *Physical Review Letters*, vol. 90, p. 120402, 2003, arXiv:hep-th/0210161.
- [43] P. Fendley, B. Nienhuis, and K. Schoutens, “Lattice fermion models with supersymmetry”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 50, pp. 12399–12424, 2003.
- [44] E. Witten, “Dynamical breaking of supersymmetry”, *Nuclear Physics B*, vol. 188, no. 3, 1981.
- [45] E. Witten, “Constraints on supersymmetry breaking”, *Nuclear Physics B*, vol. 202, pp. 253–316, jul 1982.
- [46] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, “Exact results for the σ^z two-point function of the XXZ chain at $\Delta = 1/2$ ”, *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, vol. 0509, pp. –002, 2005, arXiv:hep-th/0506114.

- [47] J. Sato and M. Shiroishi, “Density matrix elements and entanglement entropy for the spin-1/2 XXZ chain at $\Delta = 1/2$ ”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, pp. 8739–8749, 2007.
- [48] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory”, *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, vol. 0406, p. 002, 2004, arXiv:hep-th/0405152.
- [49] B. Nienhuis, M. Campostrini, and P. Calabrese, “Entanglement, combinatorics and finite-size effects in spin-chains”, 2008, arXiv:0808.2741.

Ringraziamenti

Giunto al termine di questo lavoro desidero innanzi tutto esprimere la mia riconoscenza nei confronti delle persone che hanno contribuito alla sua realizzazione: il mio relatore, Dr. Filippo Colomo, e la Dr.ssa Paola Verrucchi che, al pari di Filippo, mi ha seguito durante tutti questi mesi; una semplice citazione in queste righe non può ricompensarla per gli aiuti che mi ha dato. Ringrazio Paola e Filippo per avermi offerto l'opportunità di lavorare ad un argomento così stimolante che collegasse vari settori di mio interesse, per la prontezza nei chiarimenti e suggerimenti e nondimeno per la rilettura critica di tutti i capitoli della tesi.

Un pensiero, ovviamente, va anche alla mia famiglia, per il sostegno morale ed economico; e ad Ilaria per avermi aiutato e *sopportato* nei momenti più critici, permettendomi in tal modo di raggiungere più serenamente questo traguardo.